Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов». 2011 год.

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 1

Решения

Задание 1. Задача сводится к нахождению множества решений неравенства $\frac{\lg(6x-5)}{\lg x} \le 2$. В этом неравенстве множество допустимых значений неизвестного представляет собой объединение промежутков $(\frac{5}{6},1) \cup (1,\infty)$. При значениях неизвестного из интервала $(\frac{5}{6},1)$ значение $\lg x$ отрицательно, поэтому неравенство задачи эквивалентно условию $\lg(6x-5) \ge 2\lg x$. В силу монотонного возрастания логарифма по десятичному основанию и равенства $2\lg x = \lg x^2$ это условие эквивалентно неравенству $x^2 - 6x + 5 \le 0$. Множество решений последнего неравенства, именно отрезок [1,5], не пересекается с интервалом $(\frac{5}{6},1)$, поэтому на данном интервале решений нет. Если $x \in (1,\infty)$, то $\lg x$ >0, поэтому неравенство задачи эквивалентно условию $\lg(6x-5) \le 2\lg x$, откуда $x^2 - 6x + 5 \ge 0$. Следовательно, при $x \in (1,\infty)$ получаем $x \in [5,\infty)$.

Ответ: $x \in [5,\infty)$.

Задание 2.

Зависимость координат камня от времени:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t, \\ y(t) = H + v_0 \cos\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Выражая из первого равенства *t* через *x*: $t = \frac{x}{v\sin\alpha}$ и подставляя его во второе равенство, получим уравнение траектории: $y(x) = H + x\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2\alpha}$. В момент падения на землю $x = R,\ y = 0.$ Получаем уравнение для v_0: $0 = H + R\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{gR^2}{2v_0^2 \sin^2\alpha}.$

Отсюда $v_0 = \frac{R}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(H + R\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}}$.

Ответ: $v_0 = \frac{R}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(H + R\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}} = \frac{400}{\sqrt{7}} \approx 151$(м/с).

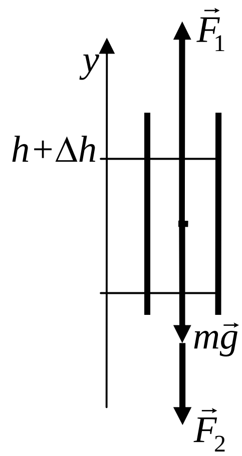
Задание 3. Искомая глубина h находится из уравнения $\frac{2000}{h}=\frac{1}{2}\sqrt{2h}$, где $150 \le h \le 2000$. В данном уравнении левая часть убывает часть убывает по переменной h, а правая возрастает. Подставляя $h=200$, отсюда заключаем, что это значение является единственным корнем на указанном промежутке.

Ответ: на глубине *h=200 м.*

Задание 4.

На нефть в трубе между высотами h и $h+\Delta h$ действуют по вертикали сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления $\vec{F}_1$ со стороны нефти, лежащей ниже, и сила давления $\vec{F}_2$ со стороны нефти, лежащей выше. Модули этих сил равны:

$$mg=\rho g S\Delta h,\ F_1=pS,\ F_2=(p+\Delta p)S,$$



где S – площадь поперечного сечения трубы, p – давление в жидкости на высоте h, $p+\Delta p$ – давление в жидкости на высоте $h+\Delta h$. По условию, жидкость движется относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей, равномерно и прямолинейно. Поэтому сумма сил, приложенных к выделенному объему жидкости, равна 0.

В проекциях на ось y получаем:

$$F_1-F_2-mg=pS-(p+\Delta p)S-\rho g S\Delta h=0,$$

откуда

$$\Delta p=-\rho g\Delta h,\ \frac{\Delta p}{\Delta h}=-\rho g=-8500\ \text{кг/(м}^2\cdot\text{с}^2\text{)}.$$

Ответ: $\frac{\Delta p}{\Delta h}=-\rho g=-8500$ кг/(м^2·с^2).

Задание 5. Пусть x- величина реальной скорости, тогда условие $|x-280|\le 30$ означает $250\le x\le 310$, а условие $|x-250|\le 30$ дает $220\le x\le 280$. Отсюда следует, что $250\le x\le 280$, т.е. $-15\le x-265\le 15$, или, что то же самое, $|x-265|\le 15$.

Ответ: 15.

Задание 6.

Вычислим парциальное давление водяного пара при t_1 = 90°C:

$$p_1=\varphi\cdot p_{\text{н}1}=0{,}045\cdot 70{,}18\ \text{кПа}\approx 3{,}158\ \text{кПа}.$$

Роса на стенках полости появится при температуре, при которой данный пар станет насыщенным. Как видно из таблицы, давление p_1 практически равно давлению насыщенного пара при температуре t_2 = 25°C. Однако при понижении температуры давление пара в полости понижается, т.к. по условию задачи объем полости постоянен, а ее стенки непроницаемы для молекул воды. Поэтому при температуре t_2 давление водяного пара равно, в соответствии с законом Шарля,

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 3{,}158\,\text{кПа} \cdot \frac{298\,\text{К}}{363\,\text{К}} \approx 2{,}592\,\text{кПа}\,.$$

Это значение давления ближе всего к давлению насыщенного пара при температуре $t_3 = 22°C$. Изменение температуры $t_3 - t_2 = -3°C$, что составляет 1% от абсолютной температуры T_2. Учет этого изменения температуры даст такое же (на 1%) понижение давления, и мы получим при t_3 давление исходного пара $p_3 \approx 2{,}566$ кПа. Пар все еще не будет насыщенным, но насыщение произойдет в долях градуса от t_3. Поэтому ответ: $t \approx 22°C$.

Проверка ответа (от участников олимпиады не требуется). Пусть роса выпала на стенках точно при 22°С. Тогда выше этой температуры пар уже ненасыщенный, и к нему применим закон Шарля: p/T = const. Получаем парциальное давление этого пара при $t_1 = 90°C$:

$$p_{22} = p_{\text{н}}(22°\text{C}) \cdot \frac{T_1}{T_3} = 2{,}645\,\text{кПа} \cdot \frac{363\,\text{К}}{295\,\text{К}} \approx 3{,}255\,\text{кПа}\,.$$

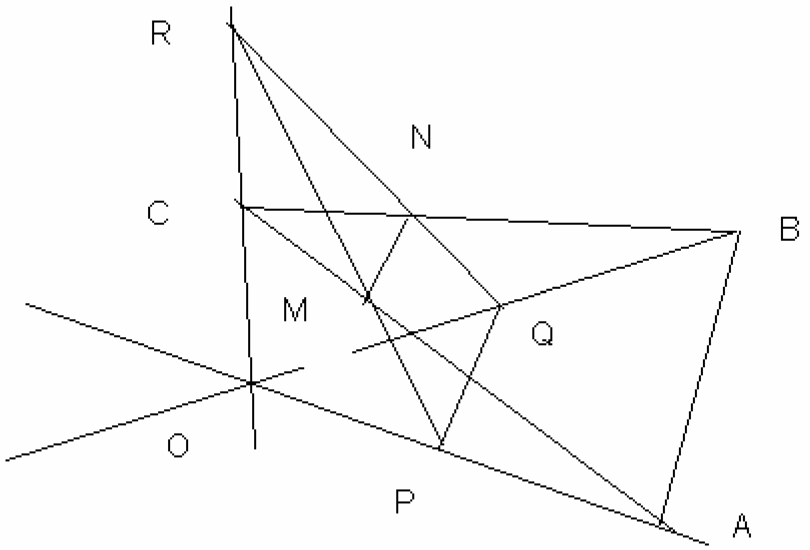
Если же роса выпала на стенках точно при $t_4 = 21°C$, то аналогичным образом получаем при $t_1 = 90°C$:

$$p_{21} = p_{\text{н}}(21°\text{C}) \cdot \frac{T_1}{T_4} = 2{,}488\,\text{кПа} \cdot \frac{363\,\text{К}}{294\,\text{К}} \approx 3{,}072\,\text{кПа}\,.$$

Давление p_1 находится практически посередине между этими двумя значениями.

Задание 7. Сначала рассмотрим плоскость Oxz, на оси z отложим точку L с координатами $(0,0,.\frac{1}{3})$. Тогда прямая LP параллельна CM, треугольники CMR и LPR подобны: RC:RL=3:5. Следовательно, точка M имеет координаты $(\frac{1}{5},0,.\frac{4}{5})$. Отсюда отношение CM:CA=1:3. Аналогично отношение CN:CB=1:5, треугольник CMN подобен треугольнику CAB: CM:CA=CN:CB=MN:AB=1:5. Площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{25}$ площади треугольника CAB, т.е. $\frac{1}{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{50}$. Далее, площадь треугольника RCM равна: $S_{\Delta RCM} = \frac{1}{2} \cdot \text{CR} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ Объем кристалла как многогранника с вершинами C,M,N,O,P и Q (Рис. 1) будем вычислять разность объемов пирамид ROPQ и NRCM. Объем пирамиды NRCM равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta RCM} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{150}$. В то же время объем пирамиды QROP равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ROP} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$. Отсюда искомый объем кристалла равен $\frac{1}{18} - \frac{1}{150} = \frac{11}{225}$.

Ответ: площадь треугольника CMN равна $\frac{\sqrt{3}}{50}$, объем кристалла равен $\frac{11}{225}$.



Задание 8.

Сопротивление проводника *AB* равно

$$R = R_A + R_B = R_{AC} + R_{CD} + R_{DB} = \rho_0 \frac{x}{S} + \rho \frac{b}{S} + \rho_0 \frac{L - x - b}{S} = \rho_0 \frac{L - b}{S} + \rho \frac{b}{S},$$

где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, откуда

$$b = \frac{(R_A + R_B)S - \rho_0 L}{\rho - \rho_0} \approx 51{,}25 \text{ м.}$$

Участок *CD* содержит в себе среднюю точку отрезка *AB*, т.к. иначе R_A или R_B равняется

$$\rho_0 \frac{L}{2S} \approx 217 \text{ Ом.}$$

Поэтому

$$R_A = R_{AC} + R_{CO} = \rho_0 \frac{x}{S} + \rho \frac{0{,}5L - x}{S},$$

откуда

$$x = \frac{0{,}5\rho L - R_A S}{\rho - \rho_0} \approx 80{,}9 \text{ м.}$$

Ответ: $b = \dfrac{(R_A + R_B)S - \rho_0 L}{\rho - \rho_0} \approx 51{,}25$ м, $x = \dfrac{0{,}5\rho L - R_A S}{\rho - \rho_0} \approx 80{,}9$ м.