

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

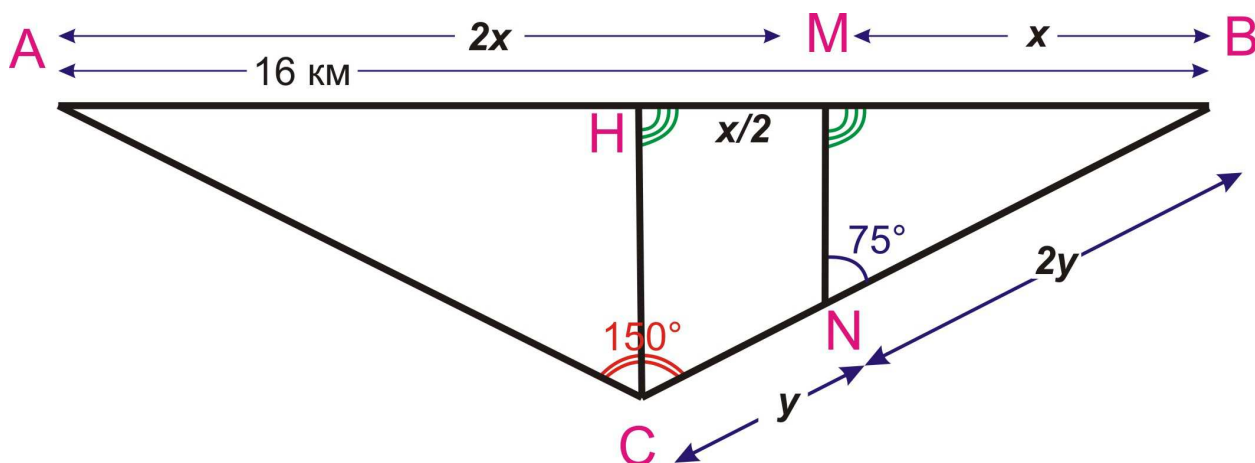
2011-2012 учебный год

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»

Задание 1.

Дано: $AB=16$ (км); $AM=2/3 AB$; $BN=2/3 BC$; $\angle ACB = 150^\circ$; $\angle BNM = 75^\circ$

Найти: AC и CB



Решение. Проведем биссектрису $\angle ACB$ (CH).

$MN \parallel CH$ (так как соответственные углы $\angle BNM$ и $\angle BCH$ равны)

$\angle BMN = \angle BNC$ как соответственные углы при параллельных прямых MN и CH и секущей $AB \Rightarrow \Delta BMN$ подобен ΔBNC (по двум углам). \Rightarrow

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BN} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN = \frac{x}{2} \Rightarrow AN = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x; BN = x + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x; \text{ т.е. } AN = BN \Rightarrow CH\text{-медиана}$$

Так-так медиана совпала с биссектрисой, то ΔABC является равнобедренным.

По теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ \text{ Пусть } AC = BC = z, \text{ тогда}$$

$$256 = z^2 + z^2 + 2z^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 256 = z^2 (2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow z^2 = \frac{256}{2 + \sqrt{3}} \text{ Так как по условию задачи расстояние}$$

есть величина положительная, то из двух корней этого квадратного уравнения решением является

$$\text{только } z = \frac{16}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Ответ: Расстояние $AC = BC = \frac{16}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

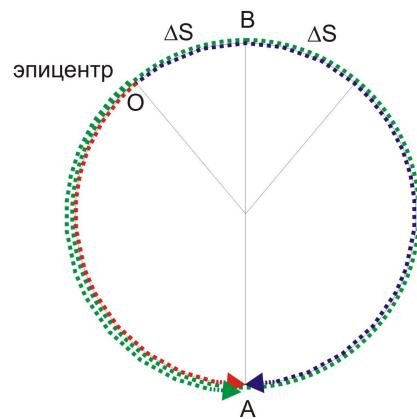
Задание 2.

Дано:

$t_1 = 11$ часов 15 мин 35 сек;
 $t_2 = 13$ часов 16 мин 51 сек;
 $t_3 = 14$ часов 27 мин 04 сек;
 $R = 6400$ км.

Найти:

v сейсмической волны,
расстояние от станции до эпицентра по поверхности Земли.



Решение. Обозначим на чертеже точкой O эпицентр, точкой A – положение сейсмической станции. Проведем через эти 2 точки меридиан длиной $2\pi R$. В общем случае его можно разделить на 2 неравные дуги. Отметим, что эпицентр O не совпадает с противоположной A точкой на поверхности (B), так как в этом случае в момент времени t_1 синхронно фиксировались бы волны прошедшие по поверхности в противоположных направлениях, в момент времени t_2 – прошедшие +1 виток итд. Таким образом, $t_2 - t_1$ было бы равно $t_3 - t_2$, что противоречит условию задачи. То есть $O \neq B$.

Обозначим за ΔS расстояние по поверхности Земли от O до B .

Тогда в момент времени t_1 волна уже прошла по поверхности Земли искомым путь OA (обозначен на рисунке **красной дугой**). В момент времени t_2 волна прошла путь $OBA = OA + 2\Delta S$ в противоположном направлении (обозначен на рисунке **синей дугой**). Следующий акт фиксации волны сейсмической станцией в момент времени t_3 соответствует пробегу OA + полный оборот вокруг Земли (**выделено на**

чертеже зеленым цветом). Тогда скорость волны $v = \frac{2\pi R}{t_3 - t_1}$, разность хода $2\Delta S = v(t_2 - t_1)$

$$\Rightarrow 2\Delta S = \frac{2\pi R}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta S = \left(\frac{2\pi R}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1)\right) / 2 \Leftrightarrow \Delta S = \pi R \left(\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\right).$$

Так как дуга $AB = \pi R$, а $AO = AB - \Delta S$ имеем, что $AO = \pi R - \pi R \left(\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\right) \Leftrightarrow AO = \pi R \left(1 - \left(\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\right)\right) \Leftrightarrow$

$$AO = \pi R \left(\frac{t_3 - t_1 - t_2 + t_1}{t_3 - t_1}\right) \Leftrightarrow AO = \pi R \left(\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\right)$$

Ответ (в общем виде): скорость = $\frac{2\pi R}{t_3 - t_1}$, расстояние = $\pi R \left(\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\right)$

Для получения ответа в числах переведем время в секунды:

$$t_1 = 11ч15м.35сек = 40535 \text{ сек.} \quad t_2 = 13ч16м51сек = 47811 \text{ сек.} \quad t_3 = 14ч27м04сек = 52024 \text{ сек.}$$

Тогда скорость волны = $2 \times 3,1415926 \times 6400 \text{ км} / 11489 \text{ сек} = 3,5 \text{ км/сек}$;

Расстояние до эпицентра = $3,1415926 \times 6400 \text{ км} (52024 \text{ сек} - 47811 \text{ сек}) / (52024 \text{ сек} - 40535 \text{ сек}) = 7372,912 \text{ км}$.

Ответ (в числах): скорость = 3,5 км/сек; расстояние = 7372,912 км.

Задание 3.

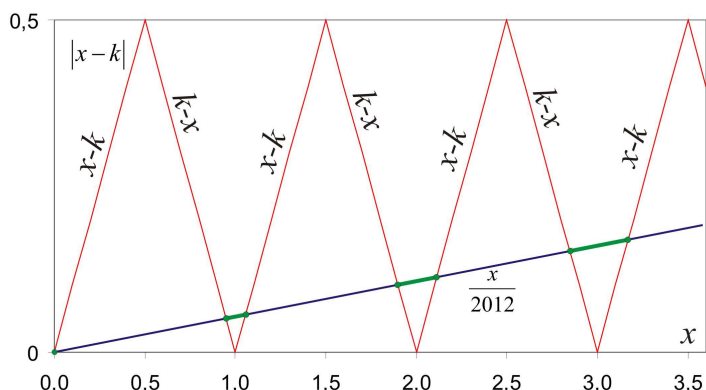
Дано:

x – точная величина измеренного объема газа,

k – округленный результат измерения (ближайшее целое значение измеренного объема газа)

Найти: при каких x

$$|x - k| \leq \frac{x}{2012} ?$$



Решение. Строим график зависимости абсолютной погрешности $|x - k|$ от x (на чертеже изображен красной линией). Как видно из чертежа, графиком абсолютной погрешности является чередование графиков $x-k$ и $k-x$, имеющих максимумы, равные 0,5 в точках $x=0,5, 1,5, 2,5$ итд. и минимумы, равные 0 в точках $x=0, 1, 2, 3$ итд.

Построим график функции $y = \frac{x}{2012}$ (на чертеже изображен синей прямой).

Найдем точки пересечения двух графиков:

1) $x=0, |x - k|=0$ (если газа нет, то и абсолютная ошибка также равна 0)

2) $k - x = \frac{x}{2012} \Leftrightarrow 2012k = 2013x \Leftrightarrow x = \frac{2012}{2013}k$

3) $x - k = \frac{x}{2012} \Leftrightarrow 2012x - 2012k = x \Leftrightarrow 2011x = 2012k \Leftrightarrow x = \frac{2012}{2011}k$

Из чертежа видно, что неравенство $|x - k| \leq \frac{x}{2012}$ выполняется на интервалах от $\frac{2012}{2013}k$ до $\frac{2012}{2011}k$; $k=1,2,3...1005$

В точке $k=1006 \frac{x}{2012} = |k - x|$, а при больших значениях x неравенство $\frac{x}{2012} > |k - x|$ будет всегда

выполняться. В точке $k=1006 \frac{x}{2012} = 1006 - x$ Таким образом, $x = \frac{2012 \cdot 1006}{2013} = 1005.500248$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left\{ x \in \left[\frac{2012}{2013}k; \frac{2012}{2011}k \right] \right. \\ \left. k = 1, 2, 3...1005 \right. \\ x \geq 1005.500248 \end{array} \right.$$

Задание 4.

Дано: $S = 5000 \text{ м}^2$; $h = 2 \text{ м}$; $t_1 = 30^\circ \text{ C}$; $t_2 = 1200^\circ \text{ C}$; $t_3 = 1100^\circ \text{ C}$; $t_4 = 100^\circ \text{ C}$; $c_1 = 840 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;
 $c_2 = 4.2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; $\rho_1 = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\rho_2 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $r = 2300 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$; $\lambda = 350 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$

Найти: V лавы, требуемый для полного выкипания озера.

Решение.

$$m_{\text{воды}} = Sh\rho_2$$

$$Q_{\text{выкипания озера}} = m_{\text{воды}}(c_2(t_4 - t_1) + r)$$

$$m_{\text{лавы}} = V\rho_1$$

$$Q_{\text{лавы}} = m_{\text{лавы}}(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda) \text{ отсюда следует, что}$$

$$Sh\rho_2(c_2(t_4 - t_1) + r) = V\rho_1(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda) \Leftrightarrow V = \frac{Sh\rho_2(c_2(t_4 - t_1) + r)}{\rho_1(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda)}$$

Ответ: $V = \frac{Sh\rho_2(c_2(t_4 - t_1) + r)}{\rho_1(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda)}$

Ответ (в числах): требуемый объем лавы = 7541.136 м³

Так как при увеличении глубины растёт давление, следовательно, с глубиной увеличивается и температура кипения воды. На глубине 20 м давление $P = P_A + \rho_2 g H = 3 \text{ атм}$. По справочным данным вода при таком давлении кипит при 188°С

При $t_4 = 100^\circ \text{ C}$ теплота нагрева и испарения 1кг воды = $(c_2(t_4 - t_1) + r) = 2594 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$

При $t_5 = 188^\circ \text{ C}$ теплота нагрева и испарения 1кг воды = $(c_2(t_5 - t_1) + r) = 2964 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ (т.е. на дне 20 метрового озера она будет больше на 14%). Однако, учитывая то, что:

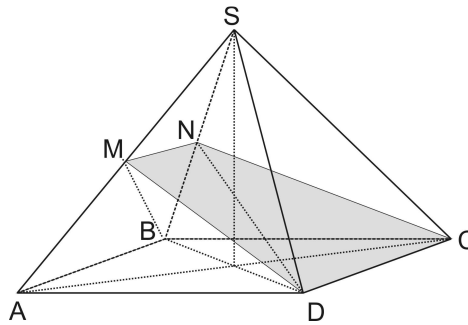
- 1) в среднем вода в озере будет находиться под меньшим давлением;
- 2) вода будет выкипать со дна (глубина будет постоянно уменьшаться);
- 3) присутствуют процессы диффузии

можно утверждать, что результат (требуемый объем лавы) изменится крайне незначительно (не больше нескольких %).

Задание 5.

Дано: ABCD – квадрат со стороной a ,
 ABCDS - правильная пирамида,
 $V_{ABCDMN} = V_{CDMNS}$
 $SA=SB=SC=SD=b$

Найти: $\frac{SM}{SA}$?



Решение. $CD \parallel \text{пл } ABS \Rightarrow MN \parallel CD \Rightarrow CDMN$ - трапеция.

Обозначим $k = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SB}; k \in (0;1)$

Высоты пирамид $MABD$ и $NBCD$, опущенные на плоскость $ABCD$, равны: $MN \parallel ABCD$

Кроме того, площади ABD и BCD равны $\frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{MABD} = V_{NBCD}$;

$$\frac{V_{DBMN}}{V_{DABM}} = \frac{S\Delta BMN}{S\Delta ABM} = \frac{MN}{AB} = k$$

По условию: $\frac{V}{2} = V_{MABD} + V_{NBCD} + kV_{MABD} \Leftrightarrow \frac{V}{2} = V_{MABD} (2 + k)$ (равенство 1)

$$\frac{V_{SDMN}}{V_{SCDN}} = \frac{S\Delta DMN}{S\Delta CDN} = k \Rightarrow$$

$$\frac{V_{SDMN}}{V_{DBMN}} = \frac{S\Delta SMN}{S\Delta BMN} = \frac{k}{1-k}$$

$$S\Delta SMN = \frac{k}{1-k} S\Delta BMN ; V_{SDMN} = \frac{k}{1-k} V_{DBMN} \Rightarrow \frac{V}{2} = \frac{k}{1-k} V_{DBMN} + \frac{1}{1-k} V_{DBMN} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{V}{2} = V_{DBMN} \left(\frac{1+k}{1-k}\right) (2); \text{из}(1) \\ \frac{V}{2} = V_{DBMN} \left(\frac{2+k}{k}\right) (3) \end{cases} \text{таким образом } 1 = \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{k}{2+k} \Leftrightarrow \frac{k(k+1)}{(1-k)(2+k)} = 1.$$

Т.к. $k \in (0;1)$ то $2k^2 + 2k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Тогда $SM = SA \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $MA = \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)SA \Leftrightarrow MA = \frac{3-\sqrt{5}}{2} SA$

$$\frac{SM}{MA} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

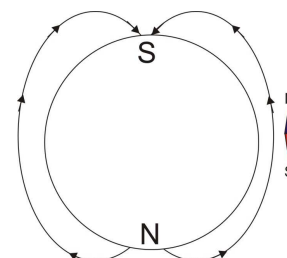
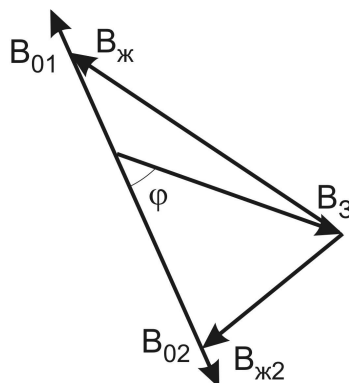
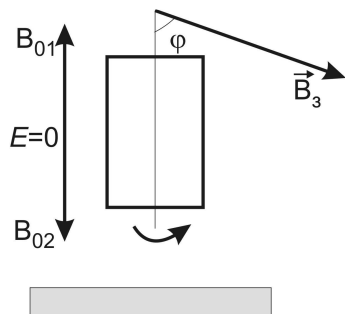
Ответ: срез делит боковую сторону в отношении $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Задание 6.

Дано: $S, \omega, E_{max}, \varphi \in 0-90^\circ$

Найти: $\vec{B}_{ж}$

Решение:



$$E_{max} = B_0 S \omega$$

$$B_0 = \frac{E_{max}}{S \omega}$$

$$E = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\varphi = B_0 \cos \omega t$$

$$E = -\omega \sin \omega t \cdot BS = E_{max} \sin \omega t$$

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_3 + \Delta \vec{B}_{ж}$$

Так как существует 2 варианта ориентации вектора \vec{B}_0 , схематически показанные на чертеже как B_{01} и B_{02} , то по теореме косинусов существует 2 решения:

Ответ:

$$1) B_{ж1}^2 = B_0^2 + B_3^2 - 2B_0B_3 \cos \varphi$$

$$2) B_{ж2}^2 = B_0^2 + B_3^2 + 2B_0B_3 \cos \varphi$$

Так как одинаковые полюса отталкиваются, а не притягиваются, то географический северный магнитный полюс, на который указывает северная стрелка компаса (синего цвета), с физической точки зрения является южным (см. схему).