

1 ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ	3
1.1 Слой с быстрым возрастанием скорости	3
1.2 Сейсмическая вертикально-неоднородная среда с волноводом. Свойства лучей и годографов волн в такой среде. Возможность восстановления скорости в волноводе.	5
1.3 Отраженные волны в среде с вертикальным градиентом скорости. Параметрические уравнения годографа отраженной волны в вертикально-неоднородной среде с горизонтальной границей раздела	9
1.4 Скорость и градиенты скорости в реальных средах	13
2 ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ДВУХМЕРНО- НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ $V(x,z)$.	15
2.1 Геометрический смысл дифференциального уравнения поля времен для двухмерно-неоднородной среды.	15
2.2 Система обыкновенных дифференциальных уравнений луча в виде удобном для численного интегрирования	15
2.3 Формы графического представления и свойства системы годографов в двухмерно-неоднородной среде. Временной разрез офсетов. Интерполяция годографов в двухмерно-неоднородной среде.	18
2.3.1 Свойства системы годографов в двухмерно-неоднородной среде.	19
2.3.2 Формы графического представления системы годографов в двухмерно-неоднородной среде.	20
2.3.3 Интерполяция годографов в двухмерно-неоднородной среде.	22
3 МОДЕЛЬ СРЕДЫ С ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ СКОРОСТИ.	27
3.1 Элементы теории подобия.	28
3.2 Исследование уравнения поля времён в неоднородной среде методами теории подобия.	28
3.3 Однородные функции в полярной системе координат.	31
3.4 Свойства изолиний скорости для однородных скоростных функций.	32
3.5 Область определения однородных скоростных функций.	33
3.6 Аппроксимативные свойства однородных скоростных функций. Геологические среды, которые могут быть приближены однородными функциями.	34

3.7 Вертикально-неоднородная среда как частный случай среды с однородной функцией скорости	36
3.8 Вывод уравнения фронта волны для сред, где скорость волн - однородная функция.	37
3.8.1 Уравнение фронта волны и параметра луча	37
3.8.2 Дифференциальное уравнение луча. Свойства лучей.	42
3.9 Подобие полей времен и системы годографов на поверхности среды с однородной функцией скорости. $V = r^m \Psi(\varphi)$.	43
3.9.1 Подобие фронтов и годографов волн	44
3.9.2 Подобные преобразования для двух нагоняющих годографов.	45
3.9.3 Подобие годографов отражённых волн.	47
3.9.4 Преобразования для двух встречных годографов.	47
3.10 Преобразование уравнения поля времен для случая однородной функции произвольной степени $V = r^m \Psi(\varphi)$ к полю времен для одномерно-неоднородной среды.	49
3.11 Преобразования уравнения поля времен для случая $m=1$ однородной скоростной функции к уравнению поля времен для вертикально-неоднородной среды.	51
3.11.1 Уравнение годографа в параметрической форме для среды, где скорость волн - однородная функция первой степени.	51
3.11.2 Обратная кинематическая задача сейсмологии для среды, где скорость волн - однородная функция первой степени.	53
3.12 Обратная кинематическая задача сейсмологии для среды, где скорость волн - однородная функция произвольной степени.	58
3.12.1 Постановка задачи	58
3.12.2 Поиск минимума функции нескольких переменных.	62
3.12.3 Вычисление среднего годографа, отвечающего аппроксимирующей функции.	65
3.12.4 Сведение обратной двумерной задачи к одномерной.	66
3.12.5 Вид годографа для среды с однородной функцией скорости нулевой степени	66
3.12.6 Алгоритм численного восстановления функции полярного угла $\xi = \xi(\alpha)$ по годографу $\tau(\rho)$.	68
3.13 Локальная аппроксимация скоростного поля однородными функциями. Метод однородных функций – аналог метода ОГТ для преломленных волн	73
3.14 Устойчивость решения обратной кинематической задачи сейсмологии на множестве двумерных однородных скоростных функций	78
3.14.1 Квазирешения.	78
3.14.2 Множество двумерных возрастающих непрерывных однородных функций, есть замкнутый компакт	79
ЛИТЕРАТУРА	83

1 Вертикально-неоднородные среды

1.1 Слой с быстрым возрастанием скорости

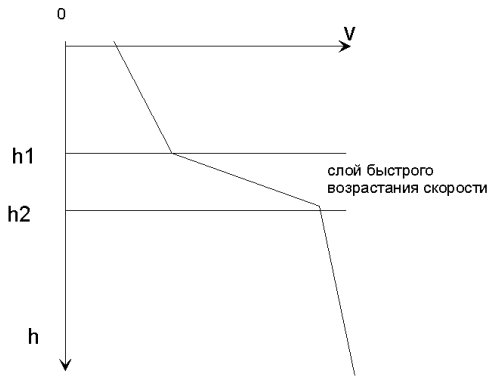


рис. 4.1

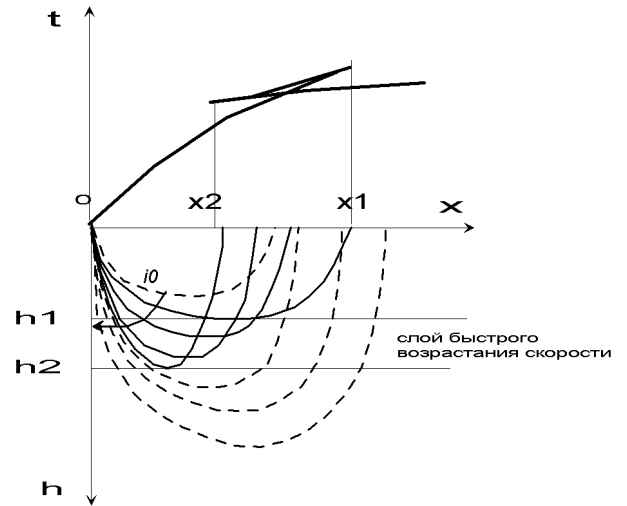


рис. 4.2

Рис. 1

Рис. 2

Необходимыми и достаточными условиями для применения формулы Герглотца-Вихерта-Чибисова являются следующие.

$X(p)$ – непрерывна,

$$X(1/v_0) = 0$$

$X(p)$ - имеет производную, которая конечна и имеет конечное число точек разрыва.

При выводе формулы Герглотца-Вихерта-Чибисова мы предполагали, что годограф рефрагированной волны – гладкая дифференцируемая выпуклая кривая без петель и угловых точек. Однако, эта формула может быть использована и в случае, когда производная функции $X(p)$ (X -абсцисса годографа, $p=dt/dx$)- разрывна, и годограф имеет петлю, но не тогда когда разрыв имеет сама функция $X(p)$. Формула Герглотца-Вихерта-Чибисова применима в случае слоев с быстрым возрастанием скорости (высокоградиентных слоев), когда на годографе появляется петля.

Допустим, скоростной разрез имеет вид, показанный на рис. 1.

В этом случае лучи ведут себя как изображено на рис. 2.

В верхнем слое лучи ведут себя нормально, то есть не пересекаются друг с другом. В слое с высоким градиентом лучи пересекаются и каждый следующий луч, после луча, который касается кровли слоя и выходит на поверхность в точке X1, выходит ближе к источнику, чем предыдущий (с меньшим углом входа). После луча, который касается подошвы выокоградиентного слоя и выходит на поверхность в точке X2, лучи опять начинают вести себя нормально, нигде не пересекаясь друг с другом. На рис. 2 и 3 лучи с нормальным поведением показаны пунктиром.

На годографе лучам, которые пересекаются друг с другом, отвечает петля (возвратная ветвь годографа) на интервале $[x_1, x_2]$. Из точки x_2 начинается опять прямая ветвь годографа, отвечающая преломленной волне в нижнем слое. Возвратная часть петли является вогнутой, так кажущиеся скорости возрастают, а абсциссы x убывают. Годограф в этом случае многозначная функция. При этом функция $p(x) = dt/dx$ является однозначной и непрерывной как видно из рис. 3, поэтому формула Герглотца-Вихерта-Чибисова применима в данном случае. Она имеет вид

$$H(x_3) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{x_1} \operatorname{arch} \frac{v^*(x_1)}{v^*(x)} dx - \int_{x_2}^{x_1} \operatorname{arch} \frac{v^*(x_2)}{v^*(x)} dx + \int_{x_2}^{x_3} \operatorname{arch} \frac{v^*(x_3)}{v^*(x)} dx \right)$$

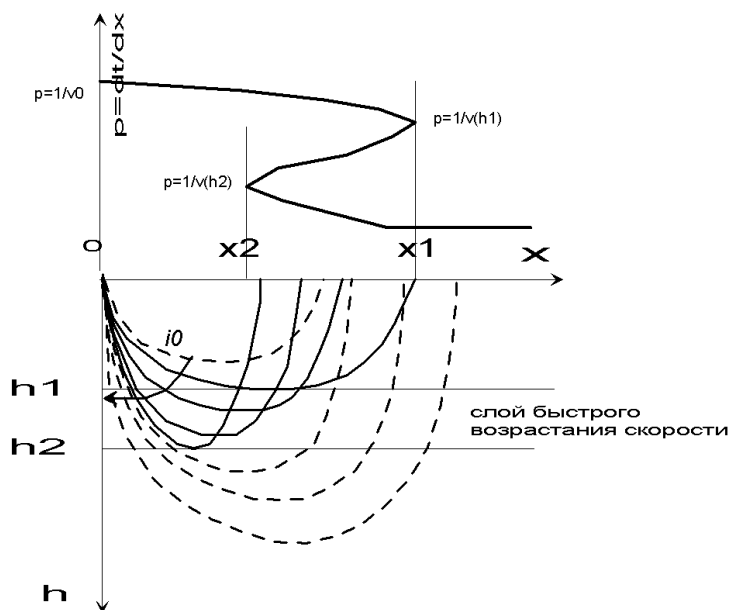


Рис. 3

1.2 Сейсмическая вертикально-неоднородная среда с волноводом. Свойства лучей и годографов волн в такой среде. Возможность восстановления скорости в волноводе.

Рассмотрим теперь случай, когда скоростная зависимость включает слой с пониженной скоростью. Пусть скорость $v(z)$ в некоторой точке z_1 начинает уменьшаться с глубиной (рис. 4), тогда ни один луч не будет иметь максимальной глубины до тех пор, пока скорость не достигнет того значения, которое она имела в точке z_1 . Поведение лучей показано на рис.5-7. Если же источник поместить внутрь слоя с пониженной скоростью, то лучи ведут себя как показано на рис 8. то есть концентрируются (фокусируются) внутри слоя с пониженной скоростью. Интенсивность волн при этом увеличивается и они долго не затухают. Такой слой с пониженной скоростью существует в толще

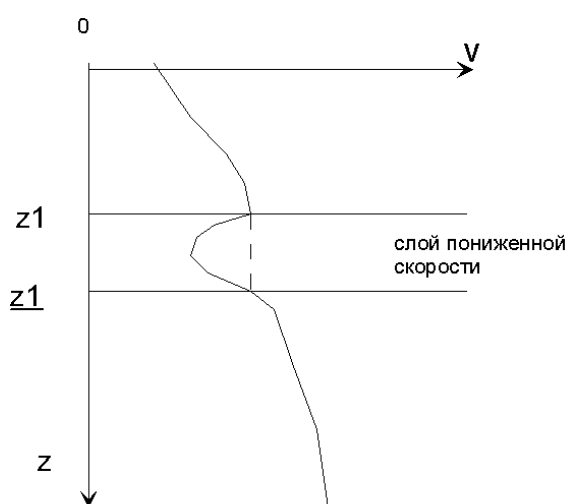


Рис. 4

океанской воды, располагаясь на небольшой глубине. При акустических исследованиях в океане было замечено, что если источник звука поместить внутрь этого слоя, то звук распространяется на большие расстояния, не затухая. Поэтому слой с пониженной скоростью часто называют волноводом.

Пусть z_1 такой уровень, где скорость $v(z_1) = v(z_1)$, тогда лучи, выходящие в точках x_1 и x_2 , имеют один и тот же параметр (рис. 5). На

годографах на участке x_1, x_2 появится зона тени. На кривой $p = p(x)$ (рис. 6)

имеется разрыв, нарушая условия применимости формулы Герглотца-Вихерта-Чибисова.

Что можно узнать о строении Земли по годографу, имеющему разрыв.

Американский геофизик Сликхтер в 1932 г. проанализировал эту проблему и

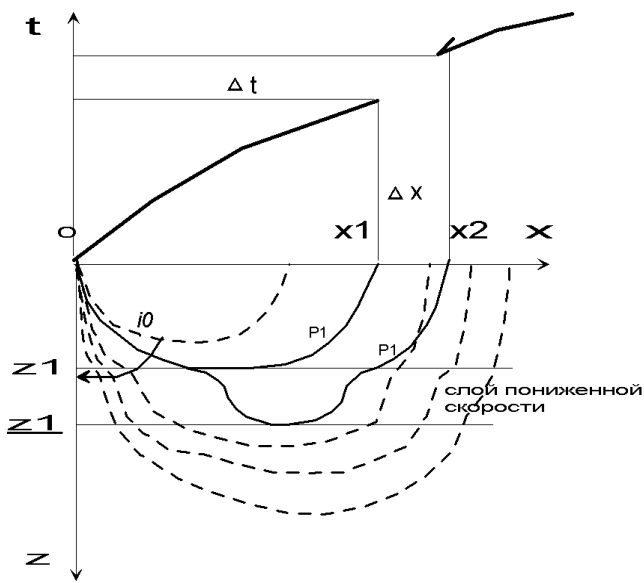


рис. 4.5

Рис. 5

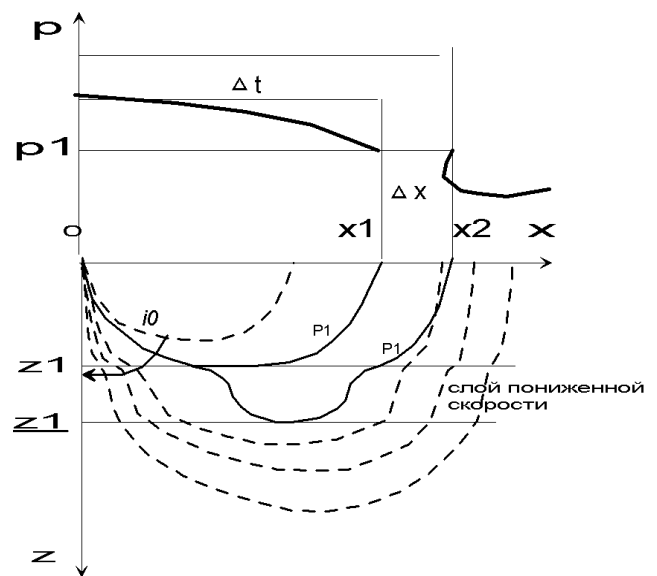


рис. 4.6

Рис. 6

сделал ряд интересных выводов.

Так как ни один луч не имеет вершины в волноводе, то годограф несет сведения только о средней скорости на пути луча во всем волноводе. Предположим, что мы задали распределение скорости в волноводе суммой некоторых однородных слоев постоянной мощности. Все эти слои можно перетасовывать, как колоду карт, без изменения среднего времени пробега волны в слое. Порядок расположения слоев при этом невозможно определить.

Однако Сликхтер нашел верхнюю границу мощности волновода, основываясь на наблюдаемых данных о ширине Δx зоны разрыва годографа и величине временной задержки Δt . Обозначая верхнюю и нижнюю границы волновода z_1 и z_2 , а угол между лучом и вертикалью i , получим

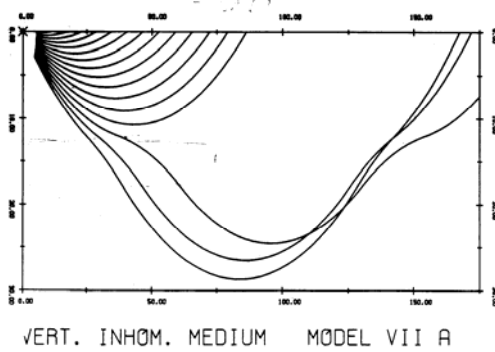


Рис. 7

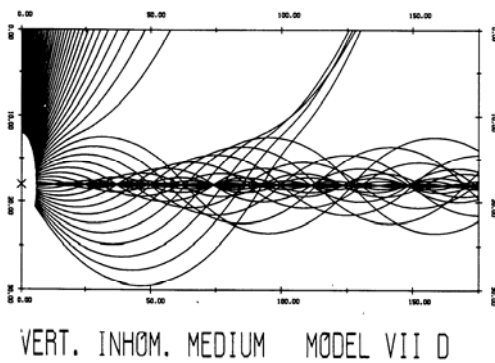


Рис. 8

$$\frac{\Delta x}{2} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \operatorname{tg} i \, dz = I_1$$

$$\frac{\Delta t}{2} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{dz}{v \cos i} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{\sin i \, dz}{v \sin i \cos i} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{p_1 \, dz}{\sin i \cos i} = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} p_1 (\operatorname{tg} i + \operatorname{ctg} i) \, dz = p_1 \frac{\Delta x}{2} + p_1 \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \operatorname{ctg} i \, dz$$

где p_1 – параметр луча, который касается верхней и нижней границ волновода
или

$$p_1 = v^{-1}(z_1) = v^{-1}(\bar{z}_1).$$

$$\frac{\Delta t}{2} = p_1 (I_1 + I_2)$$

Для заданных значений Δx и Δt значения тангенса и котангенса в пределах от z_1

$$\int_{z_1}^z tg i dz = h\alpha \qquad \int_{z_1}^z ctg i dz = h/\alpha$$

до z_1 остаются неизменными. Если предположить, что скорость в волноводе останется постоянной, то угол i будет постоянной величиной и интегралы будут выглядеть следующим образом

Обозначим

$$tg i = \alpha, \text{ тогда } ctg i = 1/\alpha$$

С другой стороны если слой пониженной скорости состоит из набора однородных слоев, то соответственно интегралы будут равны

$$I_1 = \sum \alpha_n h_n, \qquad I_2 = \sum h_n / \alpha_n$$

где α_n и h_n тангенс угла и мощность для n -ного слоя. При заданных значениях Δx и Δt , эти интегралы заданы, то являются постоянными числами и их произведение будет одним и тем же заданным числом для случая предположений – скорость постоянна и скорость переменна. Обозначим элементарные слои в однородном волноводе индексами i, j , а в неоднородном индексами k, l . Следовательно

$$\begin{aligned} I_1 * I_2 &= \sum_{i=1}^{i=n} h_i \alpha_i \sum_{j=1}^{j=n} \frac{h_j}{\alpha_j} = \sum_{i=j}^n h_i^2 \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \sum_{i < j}^{(n^2-n)/2} (h_i h_j \frac{\alpha_i}{\alpha_j} + h_j h_i \frac{\alpha_j}{\alpha_i}) = \sum_{i=j}^n h_i^2 + \sum_{i < j}^{(n^2-n)/2} (h_i h_j + h_j h_i) = \sum_{i=j}^n h_i^2 + 2 \sum_{i < j}^{(n^2-n)/2} h_i h_j = \\ & \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k h_k \sum_{l=1}^{l=n} \frac{h_l}{\alpha_l} = \sum_{k=l}^n h_k^2 + \sum_{k \neq l}^{(n^2-n)/2} (\frac{\alpha_k h_k h_l}{\alpha_l} + \frac{\alpha_l h_k h_l}{\alpha_k}) = \sum_{k=l}^n h_k^2 + \sum_{k \neq l}^{(n^2-n)/2} h_k h_l (\frac{\alpha_k}{\alpha_l} + \frac{\alpha_l}{\alpha_k}) = \\ & \sum_{k=l}^n h_k^2 + \sum_{k \neq l}^{(n^2-n)/2} h_k h_l (\frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2 + 2\alpha_k \alpha_l - 2\alpha_k \alpha_l}{\alpha_l \alpha_k}) = \sum_{k=l}^n h_k^2 + \sum_{k \neq l}^{(n^2-n)/2} h_k h_l (\frac{(\alpha_k - \alpha_l)^2}{\alpha_l \alpha_k} + 2) \end{aligned}$$

$$\frac{(\alpha_k - \alpha_l)^2}{\alpha_l \alpha_k} > 0$$

Так как тангенсы и котангенсы углов имеют одинаковый знак, то коэффициент в последнем члене выражения больше 2, отсюда

$$\sum_{i=j}^n h_i^2 > \sum_{k=l}^n h_k^2 \Rightarrow h > H$$

где h – мощность однородного волновода, H - мощность неоднородного волновода.

Другими словами, существует верхний предел мощности волновода. Значение его можно получить измерив Δx и Δt (ширину зоны тени и временную задержку) на сейсмограмме и предположив, что скорость в волноводе постоянна. Пусть vc - постоянная скорость в волноводе, а h - мощность однородного волновода, тогда $p1=1/v^*$.

$$\frac{\Delta x}{2} = \int_{z_1}^z \frac{pv}{\sqrt{1-p^2v^2}} dz = \frac{(1/v^*) \times vc \times h}{\sqrt{1-(\frac{vc}{v^*})^2}}$$

$$\frac{\Delta t}{2} = \int_{z_1}^z \frac{1}{v\sqrt{1-p^2v^2}} dz = \frac{h}{vc\sqrt{1-(\frac{vc}{v^*})^2}}$$

Мы получили два алгебраических уравнения с двумя неизвестными vc и h . Решив их, получим значения vc и h .

1.3 Отраженные волны в среде с вертикальным градиентом скорости. Параметрические уравнения годографа отраженной волны в вертикально-неоднородной среде с горизонтальной границей раздела

Пусть заданы два слоя, разделенные границей раздела (рис. 9). В верхнем слое скорость задана функцией $v=v1(z)$, а во втором $v=v2(z)$. Скоростные функции непрерывны и монотонно возрастают с глубиной. На границе раздела слоев $z=H$ скорость изменяется скачком причем $v2(H)>v1(H)$. Рефрагированные лучи, исходящие из источника, достигая границы раздела, отражаются, и при этом выполняется закон отражения. При преломлении рефрагированной волны в

нижнем слое возникает преломленная волна. Годографы прямой и отраженной волн для такой двухслойной среды имеет конечную точку. Она соответствует граничному лучу ORC, разделяющему лучи, исходящие из источника на два семейства. Лучи, расположенные ниже луча ORC с параметрами $p < p_1$, (параметр луча ORC $p_1 = 1/v_1(H)$) достигают границы раздела и отражаются от нее. Лучи, лежащие выше луча ORC, не достигают границы раздела. Однако вследствие рефракции они также выходят на поверхность среды.

Годограф прямой рефрагированной волны t_1 в верхнем слое записывается уравнением при $p > p_1$

$$x_1 = 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{pv_1(z)}{\sqrt{1 - p^2 v_1^2(z)}} dz,$$

$$t_1 = 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 v_1^2(z)}} dz.$$

Годограф отраженной волны при $p > p_1$ имеет вид:

$$x_o = 2 \int_0^H \frac{pv_1(z)}{\sqrt{1 - p^2 v_1^2(z)}} dz,$$

$$t_o = 2 \int_0^H \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 v_1^2(z)}} dz.$$

В точке, где угол отражения меньше критического $\sin i < 1/v_2(H)$ образуется преломленная волна, которая проникает во второй слой. Параметр критического угла $p_2 = 1/v_2(H)$. В уравнение годографа входит сумма интегралов, определенных при $p < p_2$

$$x_p = 2 \int_0^H \frac{pv_1(z)}{\sqrt{1-p^2v_1^2(z)}} dz + 2 \int_H^{z_{\max}} \frac{pv_2(z)}{\sqrt{1-p^2v_2^2(z)}} dz,$$

$$t_p = 2 \int_0^H \frac{1}{v_1(z)\sqrt{1-p^2v_1^2(z)}} dz + 2 \int_H^{z_{\max}} \frac{1}{v_2(z)\sqrt{1-p^2v_2^2(z)}} dz.$$

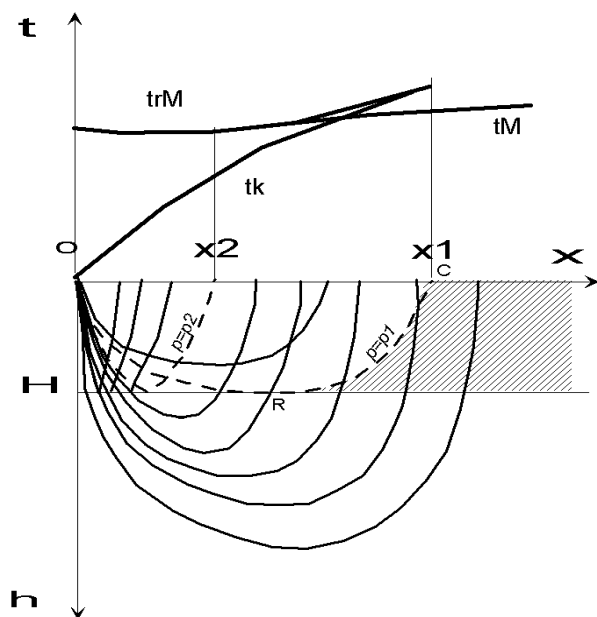


Рис. 9 В верхней полуплоскости показаны годографы t^k – прямой волны, t_r^M отраженной волны, t^M - рефрагированной волн в нижней среде,. В нижней полуплоскости изображены лучи. Заштрихована область отсутствия лучей прямой и отраженной волн.

Головная волна в случае сред с переменными скоростями не возникает.

Сравнительную интенсивность волн можно оценить по графикам, помещенным в следующей таблице 10.

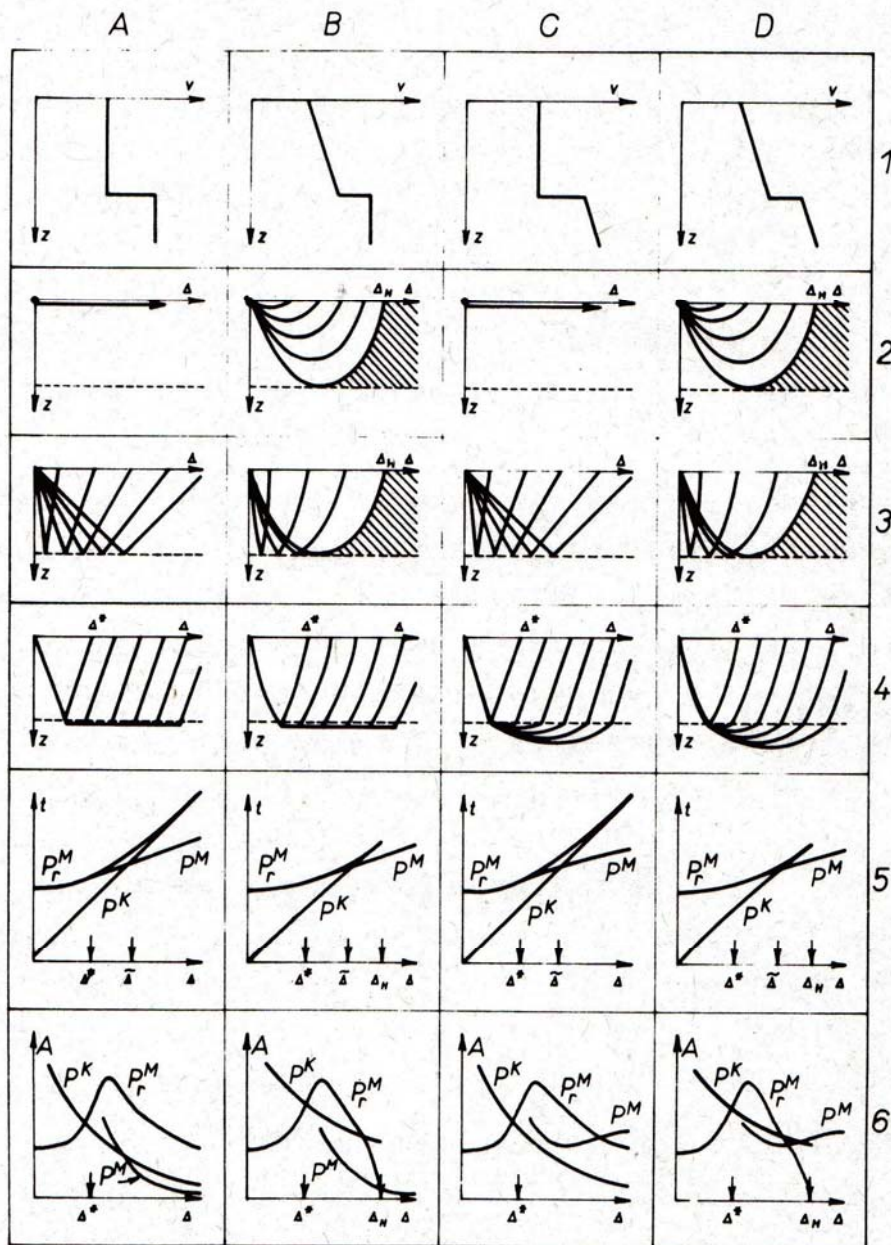
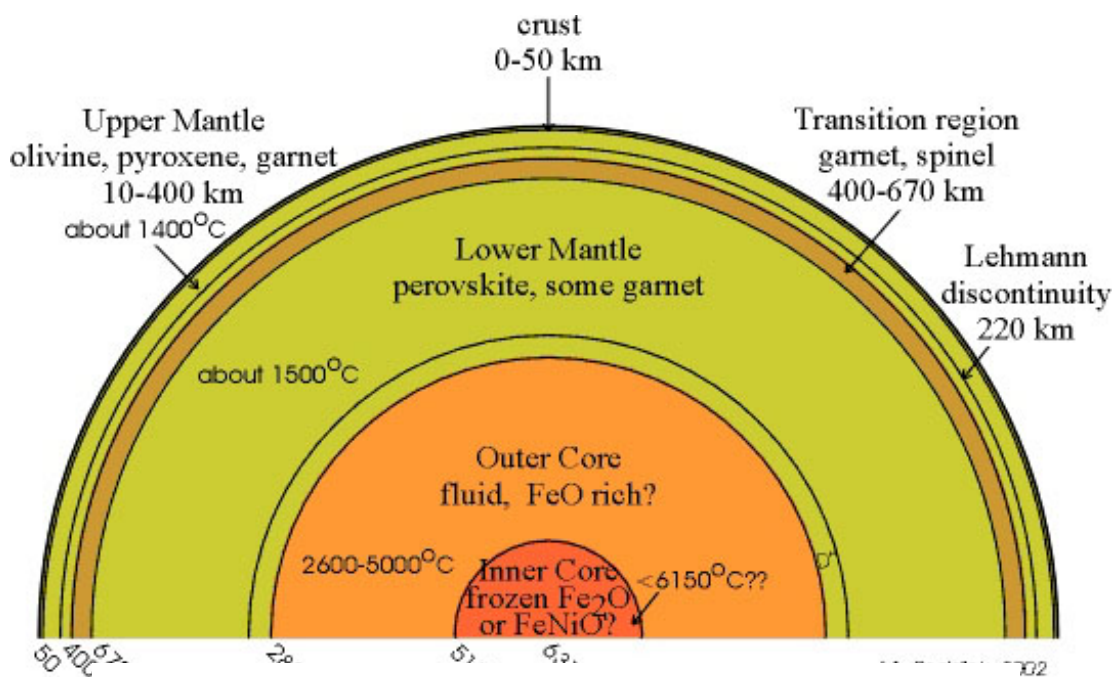


Таблица 10

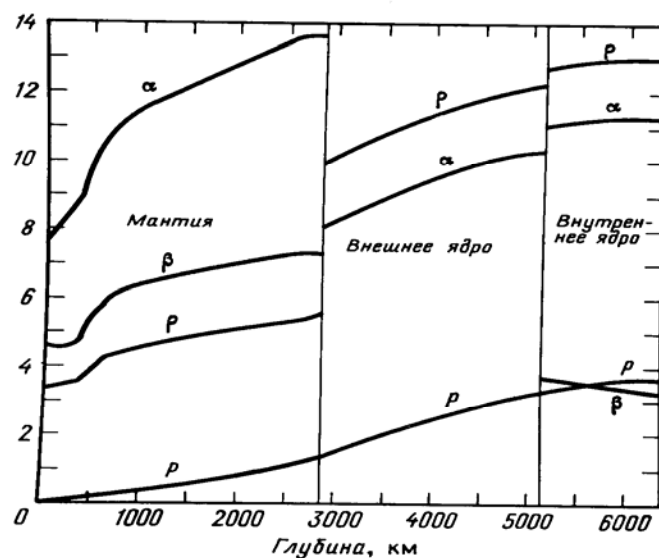
Как видно из таблицы 10, головная волна возникает только в том случае, если скорость в нижней среде постоянна. В верхней строке таблицы помещены графики изменения скорости с глубиной. Во второй строке нарисованы лучи прямой волны, в третьей строке приведены лучи отраженной волны, в четвертой строке нарисованы лучи преломленной волны. В пятой строке показаны годографы всех волн. Здесь обозначены годографы p^k – прямой волны, p^M – головной и рефрагированной волн в нижней среде, p_r^M отраженной волны. В шестой строке даны графики относительной интенсивности волн для соответствующих скоростных зависимостей (строка 1). Видно, что интенсивность преломленных рефрагированных волн значительно выше, чем

интенсивность головных волн. На графиках заштрихованы области отсутствия лучей.

1.4 Скорость и градиенты скорости в реальных средах



16.4. ПРОДВИЖЕНИЕ К ОПТИМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ 385



Распределения плотности ρ (г/см³), давления p (10^{11} Н/м²) и скоростей продольных и поперечных сейсмических волн α и β (км/с) в Земле.

Рис. 11.

На нижнем рис. 11 даны графики распределения скоростей в Земле.

Скорости продольных волн в слоях земли изменяются с глубиной немонотонно.

Кора (глубина до 60 км), 0.3 -8 км/с,

верхняя мантия (глубина 60-670), скорости 8-11 км/с;

Нижняя мантия- (глубина 670-2900 км), скорости 11-13.7 км/с;

внешнее ядро (жидкое) глубина 2900- 5100км, скорость 8-11.5 км/с; внутреннее ядро глубина 5100-6373 км, скорость 12.3-12.7 км/с.

Известно, что градиент есть производная по направлению наибольшего возрастания функции, следовательно, можно написать $grad v = dv/dn$, где n есть направление нормали к изолинии скорости в данной точке. Определим, в каких единицах измеряются градиенты скорости. Обозначим размерность длины $[L]$, времени $[T]$, тогда

$$grad v = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\left[\frac{L}{T} \right]}{[L]} = [T^{-1}]$$

Так как время в сейсморазведке измеряется в секундах, то единица измерения градиента скорости есть $[c^{-1}]$. Величина градиента скорости инвариантна относительно того, в каких единицах измеряется расстояние в метрах или километрах.

Диапазон изменения скорости в реальных средах ограничен $0.3 < v < 13.7$ км/с.

Диапазон значений модуля градиента скорости практически неограничен. От 0 (однородная среда) до ∞ (скачок скорости на границе раздела). В

приповерхностных частях разреза измеряемые величины градиента скорости могут составлять 300- 600 c^{-1} . В глубинных частях коры и мантии величины градиента скорости до 0.01 c^{-1} .

2 Произвольные двумерно- неоднородные среды $v(x,z)$.

2.1 Геометрический смысл дифференциального уравнения поля времен для двумерно-неоднородной среды.

Принцип Гюйгенса является одним из основных законов геометрической сейсмологии. Согласно этому принципу, каждую точку фронта волны в момент t_0 можно представить в виде элементарного источника колебаний. Огибающая таких волновых фронтов с радиусами, равными $v_i dt$ дает положение фронта волны в момент $t_0 + dt$.

Аналитическим выражением принципа Гюйгенса является известное дифференциальное уравнение Эйконала или уравнение поля времен

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, z)}$$

Или в векторной форме

$$|\text{grad } t| = \frac{1}{v}$$

2.2 Система обыкновенных дифференциальных уравнений луча в виде удобном для численного интегрирования

Уравнение поля времен есть уравнение кривой, определяющей положение волнового фронт в в заданный момент времени. По мере возрастания времени волновой фронт перемещается в новое положение. Лучи остаются фиксированными в пространстве. В настоящем случае нас интересует их положение для заданного источника и среды с заданной скоростью $v(x,z)$. Величину t (время) полезно использовать в качестве параметра для задания уравнений

$$x=x(t), z=z(t), \theta=\theta(t), \quad (1)$$

которые представляют собой параметрические уравнения некоторого луча, где t означает время пробега по этому лучу от некоторой начальной точки. Из определения луча (верного только для изотропной среды) как нормали к волновому фронту следует, что вектор, направленный вдоль луча, есть

$$\bar{s} = \text{grad}t \quad (2)$$

Его называют вектором медленности

$$|\bar{s}| = \frac{1}{v} = n \quad (3)$$

Выведем формулу уравнения луча для среды $v=v(x,z)$

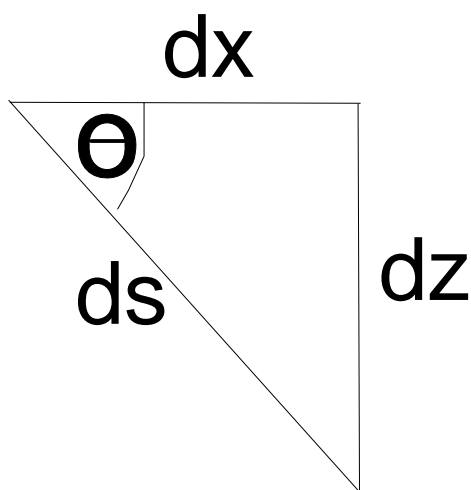


рис. 12.

Направляющие косинусы луча, вышедшего из источника (x_0, z_0) , будут

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \theta, \quad (4)$$

где θ – переменный угол наклона луча к оси x , ds - элемент дуги по лучу (рис.12).

Введем t - текущее переменное время – параметр луча.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \theta \frac{ds}{dt} = v(x, z) \cos \theta \\ \frac{dz}{dt} &= \sin \theta \frac{ds}{dt} = v(x, z) \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

где $ds/dt=v(x,z)$ -скорость распространения волн. С другой стороны, направляющие косинусы луча получаются при делении левой и правой

частей уравнения поля времен на величину обратную квадрату скорости (рис. 13).

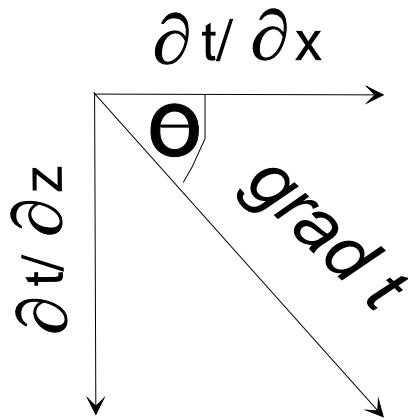


рис. 13.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= v(x, z) \frac{\partial t}{\partial x} \\ \sin \theta &= v(x, z) \frac{\partial t}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим $1/v(x, z) = n(x, z)$. Переносим $n(x, z)$ в левую часть уравнений и дифференцируя верхнее равенство по z , а нижнее по x , получим следующее

$$\frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial z} = \frac{\partial(\sin \theta)}{\partial x}, \quad (7)$$

так как

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial x}. \quad (8)$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial s} &= \frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \\ \frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial(n \sin \theta)}{\partial x} \sin \theta &= \\ \frac{\partial n}{\partial x} \cos^2 \theta - n \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} \sin^2 \theta + n \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial n}{\partial x} \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем далее это уравнение, учитывая (4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial s} &= \frac{\partial(n \cos \theta)}{\partial t} \frac{dt}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x}, \\
-n \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{v} + \frac{\cos \theta}{v} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\cos \theta}{v} \frac{\partial n}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial n}{\partial x}, \\
-n^2 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial n}{\partial x} (1 - \cos^2 \theta) + \frac{\partial n}{\partial z} \sin \theta \cos \theta &= 0, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{1}{n^2} \sin \theta \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{n^2} \cos \theta \frac{\partial n}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial x} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial n}{\partial z} &= \frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial z} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = v'_x \sin \theta - v'_z \cos \theta$$

Таким образом, в двухмерном случае сейсмический луч описывается системой трех простых дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v(x, z) \cos \theta, \\
\frac{dz}{dt} &= v(x, z) \sin \theta, \\
\frac{d\theta}{dt} &= v'_x \sin \theta - v'_z \cos \theta.
\end{aligned}
\tag{11}$$

Решить эту систему уравнений можно численными методами. Если задана функция скорости или скорость задана таблично (в узлах некоторой сетки), необходимо также задать начальные условия: точку (x_0, z_0) , через которую проходит луч, и направление луча в этой точке – θ_0 начальный угол, а также величину шага интегрирования.

В результате получим для заданных значений t значения $x(t)$, $z(t)$, $\theta(t)$ для искомых точек луча

2.3 Формы графического представления и свойства системы годографов в двухмерно-неоднородной среде. Временной разрез офсетов. Интерполяция годографов в двухмерно-неоднородной среде.

2.3.1 Свойства системы годографов в двумерно-неоднородной среде.

Решением уравнения поля времен является функция поля времен. Начальные условия задают положение источника в момент времени $t=t_0$.

В заданной двумерно-неоднородной среде значение поля времен зависит от четырех переменных - координат источника и приемника.

$$t=t(x_0, z_0, x, z).$$

Систему годографов на поверхности среды мы получим, если положим в этом уравнении, $z_0=0, z=0$, т.е будем считать, что источники и приемники расположены на поверхности среды

Система годографов или функция годографа есть функция двух переменных

$$t=t(x_0, x).$$

В двумерно-неоднородных средах выполняется принцип взаимности

$$t=t(x_0, x) = t=t(x, x_0)$$

Для решения обратной задачи в случае вертикально-неоднородной среды достаточно в качестве исходных данных задать один годограф с источником в любой точке, поскольку все годографы на поверхности среды в этом случае одинаковы. В случае двумерно-неоднородной среды в качестве исходных данных необходимо задать систему годографов такую, что источники и приемники расположены на профиле с одинаковым шагом.

Признаком сильной горизонтальной неоднородности среды могут быть следующие.

1. Левая и правая ветви годографа несимметричны относительно вертикальной прямой проходящей через точку источника.
2. Два встречных годографа несимметричны относительно вертикальной прямой, проходящей через середину взрывного интервала. В случае резкого изменения скорости по горизонтали один из встречных годографов может быть выпуклым, другой – вогнутым.
3. Нагоняющие годографы непараллельны. В случае резкого изменения скорости по горизонтали нагоняющие годографы могут пересекаться
4. Годографы первых вступлений могут иметь точки перегиба. Такие точки соответствуют областям разреза, где горизонтальная составляющая градиента скорости меняет знак

Иллюстрацией могут служить годографы, полученные на поверхности крупного оползня в Северо Осетии (рис. 14)

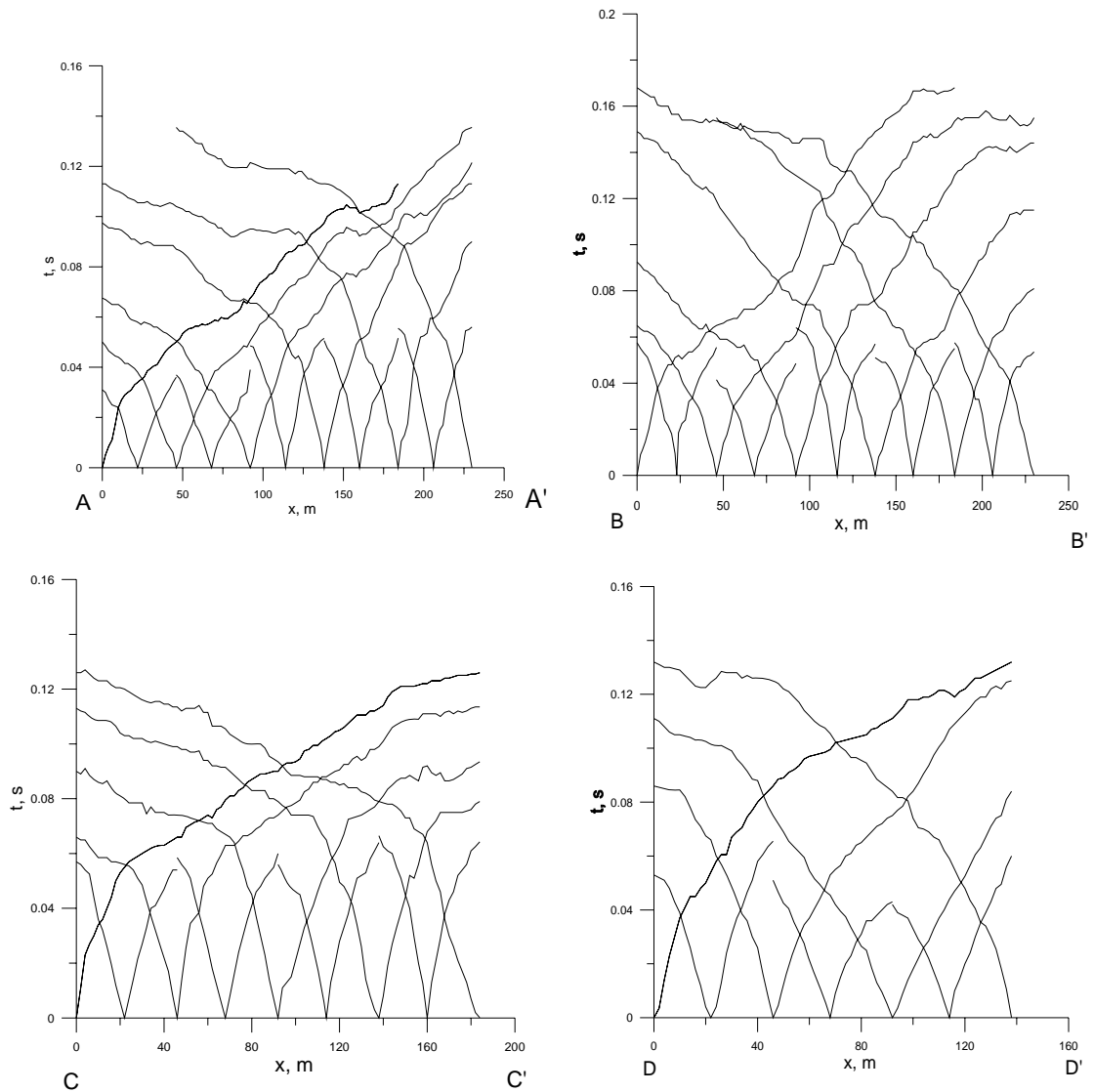


Рис. 14

2.3.2 Формы графического представления системы годографов в двухмерно-неоднородной среде.

Все годографы изображаются на одной плоскости координат, где x – расстояния по профилю t - время прихода волн

Традиционно система годографов выглядит как показано на рис. 15, при этом мы изображаем линии уровня независимой переменной $X_0 = \text{const}$

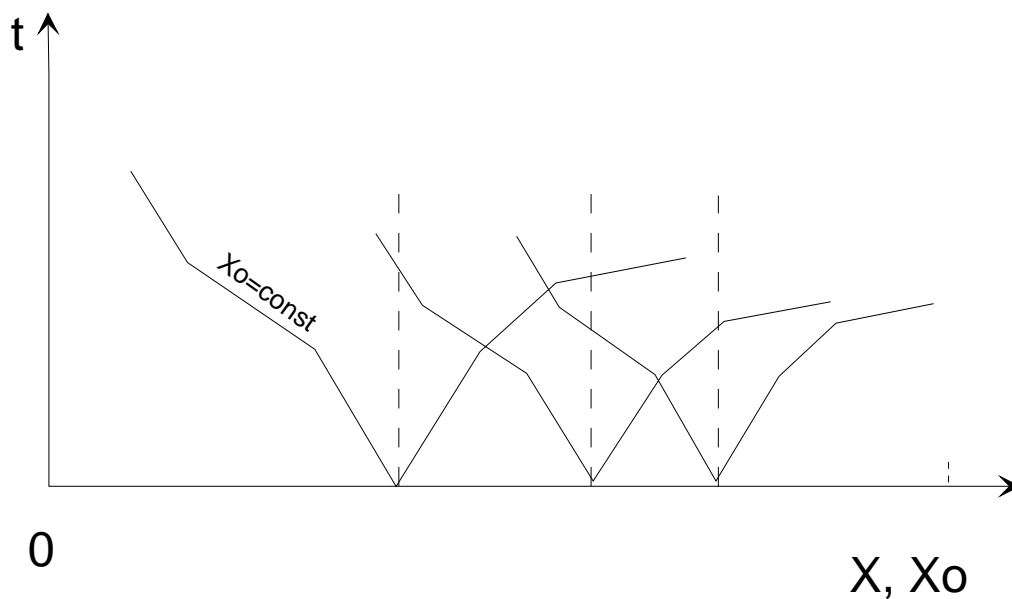


Рис. 15

Принятый в математике способ изображения функции 2-х переменных на плоскости есть изображение линий уровня функции, а не линий уровня одной из независимых переменных. При таком изображении система годографов выглядит, как показано на рис 16

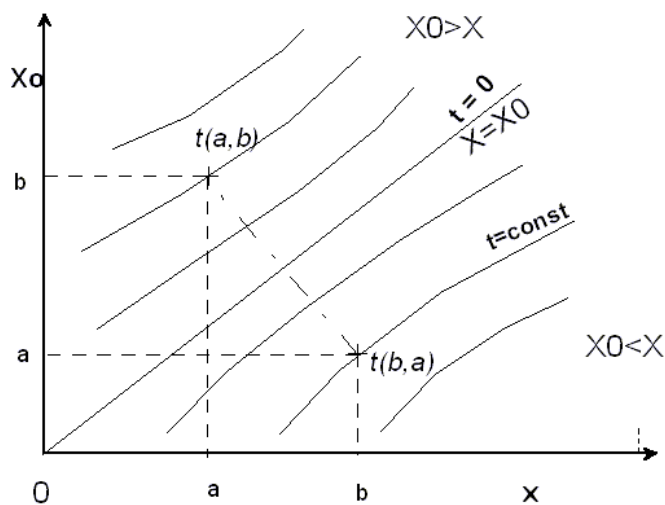


Рис. 16

В таком виде система годографов всегда симметрична относительно прямой $X=X_0$ вследствие соблюдения принципа взаимности, когда $t(a,b)=t(b,a)$. Поэтому в случае системы наблюдений с равным шагом между источниками и приемниками достаточно регистрировать только правые ($X>X_0$) или только левые ветви годографов ($X<X_0$).

2.3.3 Интерполяция годографов в двумерно-неоднородной среде.

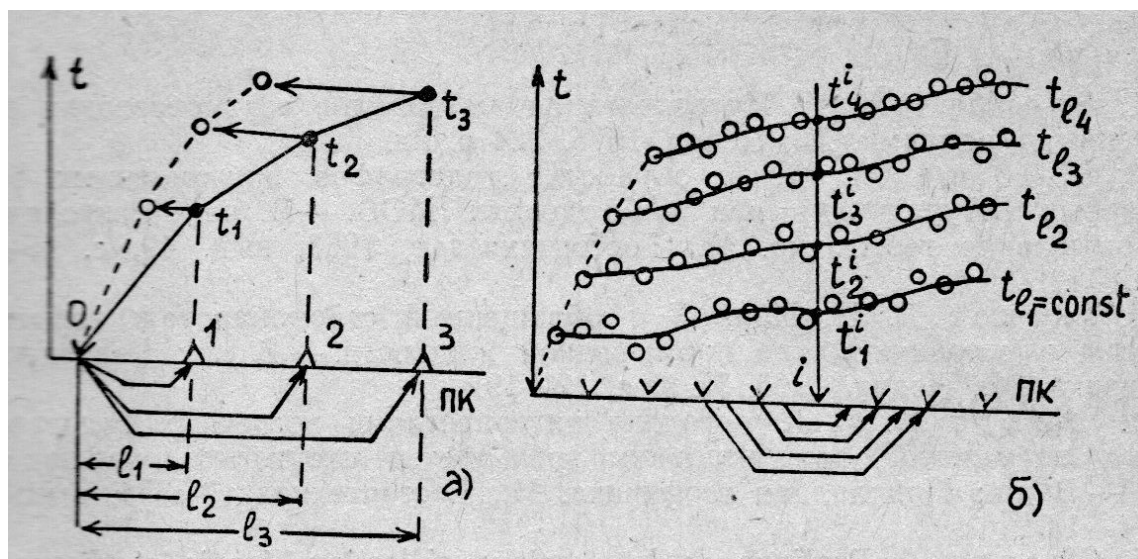


Рис.17

Сейсмические годографы вдоль профиля описываются функцией 2-х переменных $t(x_0, x)$, где x - координата приемника, x_0 - координата источника. Эта функция всегда задана дискретно.

Интерполяция используется, когда необходимо вычислить какие-либо производные. Без этого любые сейсмические построения невозможны. Линейная интерполяция вносит наименьшие искажения в интерполируемые годографы. Чтобы построить двумерный разрез, нужна двумерная интерполяция годографов. Для интерполяции используется разрез офсетов или разрез равных удалений источник-приемник.

Разрез офсетов является наблюдаемым временным полем, это годографы, преобразованные к следующим координатам.

$$x = \frac{x_0 + x}{2}, l = |x_0 - x|.$$

Здесь x - середина расстояния источник-приемник, l - офсет (расстояние источник-приемник).

Чтобы построить разрез постоянных офсетов, мы начинаем с равномерной линейной интерполяции каждого годографа (с постоянным интервалом) между приемниками, расстояния при этом отсчитываются от источника (рис. 17, 18). Следующий шаг состоит в отнесении каждого интерполированного значения к середине расстояния источник-приемник

(рис.17). Взаимные точки в результате оказываются представленными одной точкой (Рис.19). Времена, соответствующие равным офсетам, мы соединяем прямой линией. Полученное в результате временное поле есть поле изолиний офсетов. Такое поле однозначно и непрерывно. Его легко интерполировать, то есть вычислить годограф с источником в любой точке профиля, как это показано на рисунках 20 и 21, где представлен разрез равных офсетов по профилю на берегу Печорского моря.

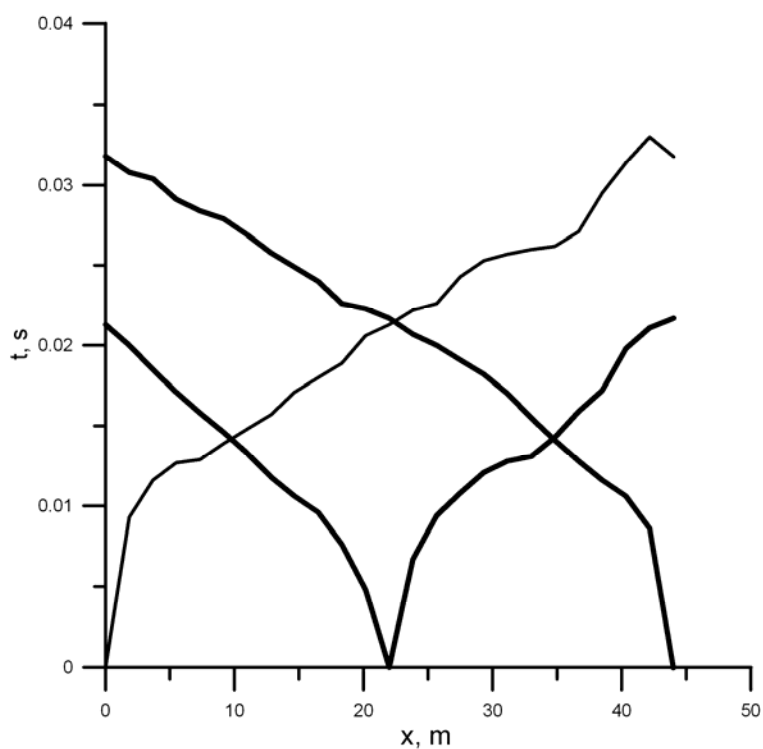


рис. 18

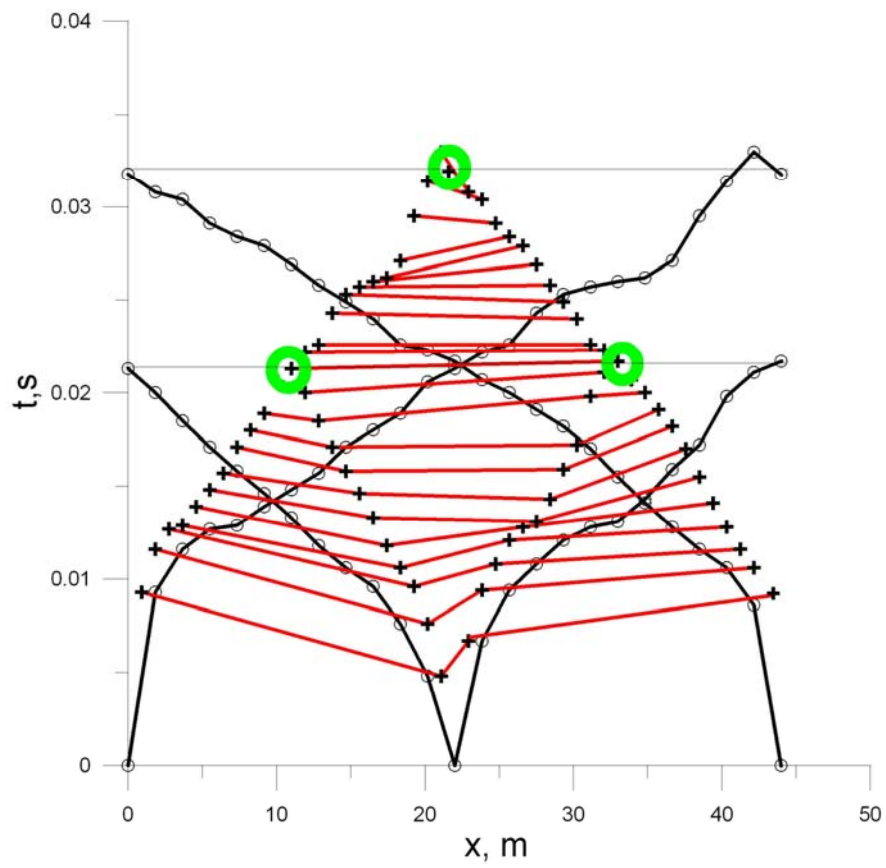


Рис. 19.

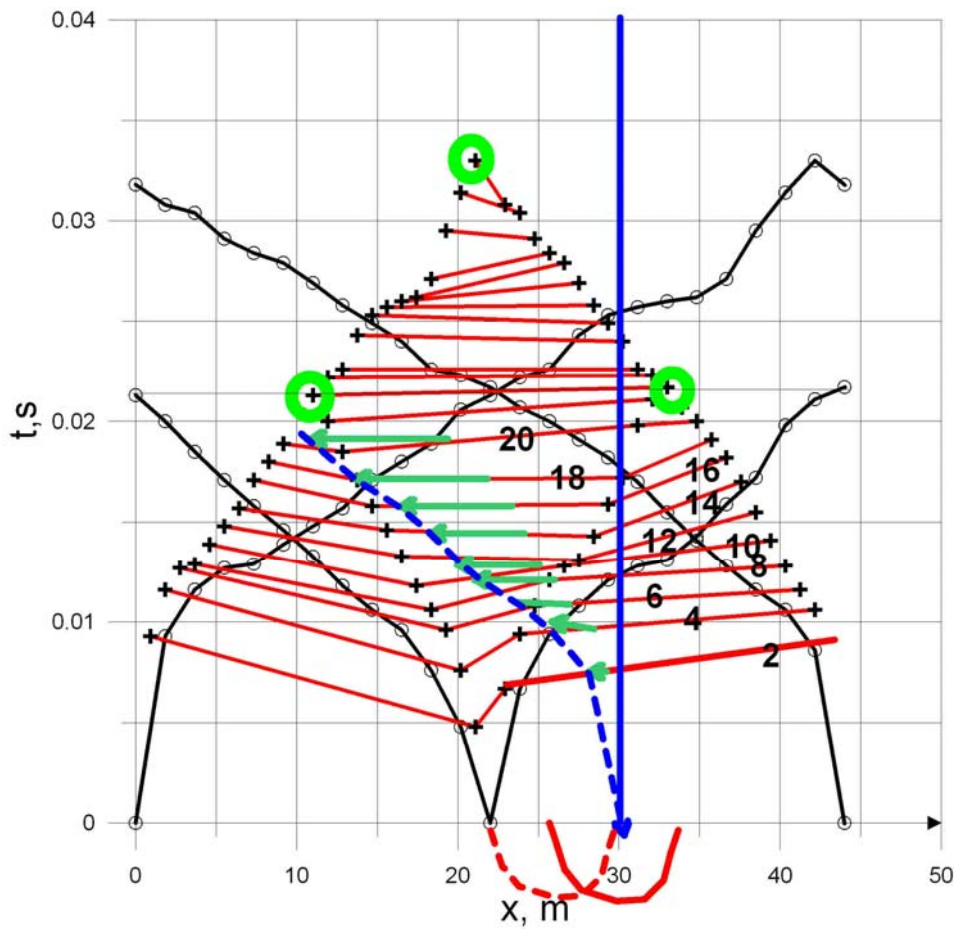


Рис. 20.

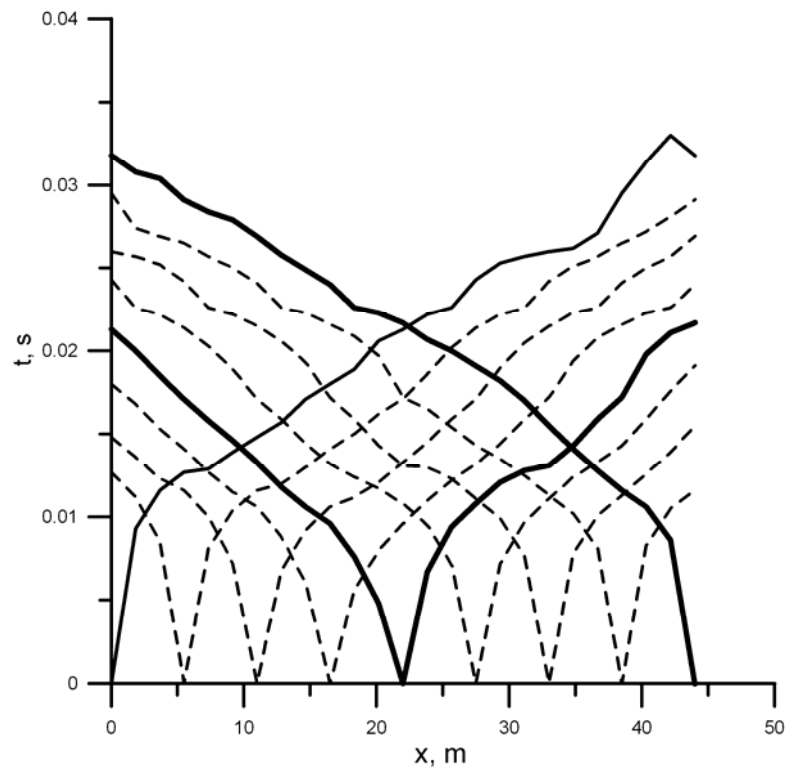


Рис. 21. Интерполированная система годографов

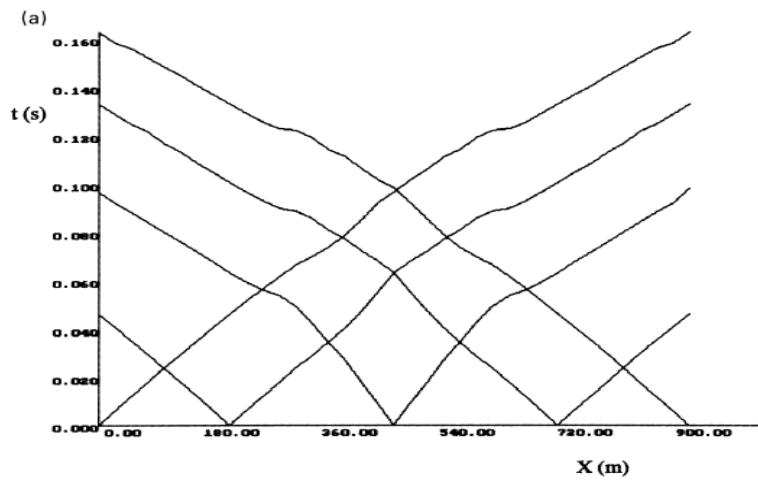
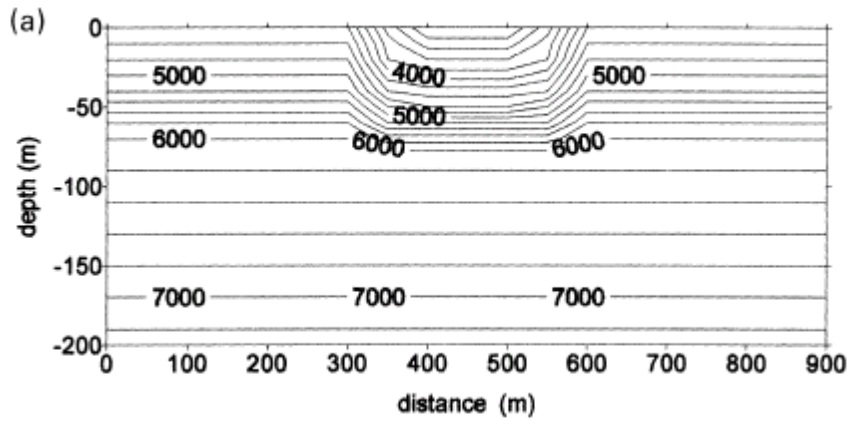
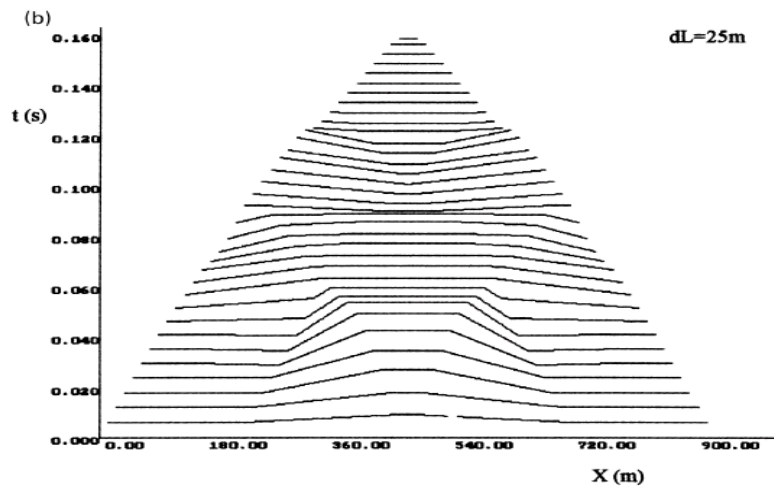


Fig
co
fie
vel
 x_0
is
thu
sai
na
co
int
rin
mc

Рис. 22



Чтобы построить более детальный разрез можно использовать интерполяцию. Если система годографов достаточно полная и равномерная, нет необходимости использовать интерполяцию. Этот алгоритм интерполяции предложен Пузыревым Н.Н, в 1963 г. Линейная равномерная интерполяция является сглаживающей процедурой. Даже для самых длинных расстояний между источниками, лучи двух встречных годографов пронизывают общий объем разреза внутри луча, который соединяет источники. Следовательно, между двумя встречными годографами всегда может быть произведена интерполяция

Из рис. 19 мы видим, что расстояние между изолиниями офсетов изменяется с изменением наклона годографов. Таким образом, мы можем видеть смену волн или смену слоев на временном разрезе. Главные особенности глубинного разреза отображаются на временном разрезе офсетов. На рис 22 изображена модель с провалом в верхнем слое. На разрезе офсетов (рис 22 внизу) четко отображается структура разреза. Визуальное сравнение окончательного глубинного и наблюдаемого временного разрезов позволяет нам сделать заключение о том, правильны ли наши глубинные построения.

3 Модель среды с однородной функцией скорости.

Для вертикально-неоднородной среды все годографы на поверхности среды идентичны друг другу, и для решения обратной задачи - восстановления зависимости скорости от глубины - достаточно задать годограф из одного любого источника. Для восстановления произвольной скоростной функции двух координат необходима полная система годографов на поверхности среды, когда источники и приёмники заданы с постоянным одинаковым шагом по профилю.

Ясно, что в случае произвольной скоростной функции двух координат, годографы из двух соседних источников могут произвольным образом отличаться друг от друга. Однако, геологические среды, как правило, слоисты и годографы рефрагированных волн, зарегистрированные в двух соседних точках профиля, обладают всегда некоторым сходством, похожи друг на друга. Мерой сходства может быть подобие.

Предположим, что скоростная функция такова, что годографы на поверхности среды подобны друг другу.

Покажем, что такими свойствами обладают среды, где скорость сейсмических волн - однородная функция двух координат.

3.1 Элементы теории подобия.

Подобные явления (физические поля, геометрические фигуры) - это такие явления, которые могут быть совмещены после линейного преобразования переменных, описывающих эти явления.

Пусть каждое из подобных явлений описывается n переменными: $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, где i - номер переменной, N - количество явлений и α - параметр, номер явления, так что $1 < \alpha < N$. Явления, подобные между собой, являются подобными, если одноимённые переменные этих явлений связаны между собой линейными соотношениями:

$$\{ \{ x_{i\alpha} = C_{i\alpha} \alpha x_{i1} \}_{i=1}^n \}_{\alpha=1}^N;$$

Данные равенства описывают преобразования подобия. Известно также, что дифференциальные или алгебраические уравнения, характеризующие подобные явления, остаются инвариантными относительно преобразований подобия.

3.2 Исследование уравнения поля времён в неоднородной среде методами теории подобия.

Рассмотрим уравнение поля времён в неоднородной среде, где скорость волн — произвольная функция двух координат $v = v(x, z)$.

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, z)} \quad (12)$$

Начальное условие $t(x=0, z=0) = 0$ задаёт точку источника.

Введём линейное преобразование переменных:

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1, \\ z &= C_2 z_1, \\ t &= C_3 t_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Посмотрим, при каких соотношениях констант C_1, C_2, C_3 и ограничениях на функцию $v(x, z)$ уравнение поля времён остаётся инвариантным относительно преобразований (13):

$$\left(\frac{\partial C_3 t_1}{\partial C_1 x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial C_3 t_1}{\partial C_2 z_1}\right)^2 = \frac{1}{v^2(C_1 x_1, C_2 z_1)} \quad (14)$$

$$\left(\frac{C_3}{C_1}\right)^2 \left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{C_3}{C_2}\right)^2 \left(\frac{\partial t_1}{\partial z_1}\right)^2 = \frac{1}{v^2(C_1 x_1, C_2 z_1)}, \quad (15)$$

Пусть $C_1 = C_2$ и $v(x, z)$ такова, что выполняется равенство

$$v(C_1 x_1, C_1 z_1) = C_1^m v(x_1, z_1). \quad (16)$$

Тогда

$$\left(\frac{C_3}{C_1}\right)^2 \left(\left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t_1}{\partial z_1}\right)^2\right) = \frac{1}{C_1^{2m} v^2(x_1, z_1)}. \quad (17)$$

При условии

$$(C_3 / C_1)^2 = 1 / (C_1)^{2m},$$

$$C_3 = C_1^{1-m}, \quad (18)$$

уравнение поля времён (12) остаётся инвариантным относительно линейных преобразований (13):

$$\left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t_1}{\partial z_1}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x_1, z_1)}. \quad (19)$$

Уравнение (12) после преобразований (13) при условии (18) остается неизменным, следовательно, поля времён, описываемые этим уравнением и введенными преобразованиями, подобны.

Условие $v(C_1 x_1, C_1 z_1) = C_1^m v(x_1, z_1)$ выделяет класс однородных функций.

По определению, однородная функция $f = f(x, y)$ удовлетворяет равенству

$$f(Cx, Cy) = C^m f(x, y),$$

где m - степень однородной функции, действительное число, $-\infty < m < +\infty$. Однородную функцию в декартовых координатах нельзя описать определённой формулой. В полярной системе координат однородные функции имеют более конкретную формулу.

3.3 Однородные функции в полярной системе координат.

Для однородных функций выполняется теорема Эйлера. По теореме Эйлера для $v(x, z)$ выполняется равенство :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)x + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)z = mv \quad (20)$$

Преобразуем это уравнение к полярным координатам. Соотношение полярных и декартовых координат определяется формулами :

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctg(z/x) \end{aligned} \right| \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Учитывая (21), получим

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi,$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{z}{x^2} / \left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right) = -\frac{z}{x^2 + z^2} = -\frac{\sin \varphi}{r},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{x} / \left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2 + z^2} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Подставим в уравнение Эйлера полученные равенства:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right)\right) r \cos \varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{r}\right)\right) r \sin \varphi = mv$$

Или

$$r \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) \cos^2 \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + r \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) \sin^2 \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi = mv$$

$$r \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = mv$$

$$\partial v / \partial \ln r = m v \tag{22}$$

$$\partial \ln v / \partial \ln r = m \tag{23}$$

В последнем уравнении присутствует частная производная, поэтому при интегрировании нужно прибавить некоторую произвольную функцию другой независимой переменной. Получим:

$$\ln (v) = m \ln (r) + f(\varphi), \tag{24}$$

Так как $f(\varphi)$ - произвольная функция,

$$v = r^m e^{f(\varphi)} = r^m \psi(\varphi). \tag{25}$$

Переменные разделились. Таким образом, мы получили произведение двух функций - степенной функции радиальной координаты и произвольной функции полярного угла.

3.4 Свойства изолиний скорости для однородных скоростных функций.

Итак, функция скорости в полярной системе координат имеет вид:

$$v = r^m \psi(\varphi)$$

Положим, $v = v_1 = \text{const}$, тогда $v_1 = r_1^m \psi(\varphi)$ уравнение изолинии скорости $v=v_1$ запишется в виде:

$$r_1^m = v_1 / \psi(\varphi) \Rightarrow r_1 = v_1^{1/m} / \psi^{1/m}(\varphi) = C_1 / \psi^{1/m}(\varphi),$$

где $C_1 = v_1^{1/m}$

Теперь положим $v = v_2$, тогда $r_2 = v_2^{1/m} / \psi^{1/m}(\varphi) = C_2 / \psi^{1/m}(\varphi)$.

Отсюда получим $r_1 / r_2 = C_1 / C_2$.

Отношение радиусов двух изолиний есть постоянная величина. Преобразование подобия как раз и заключается в увеличении радиусов в постоянное число раз. Две произвольные изолинии скорости в случае однородных скоростных функций подобны друг другу. Так как $\psi(\varphi)$ - произвольная функция, форма этих изолиний может быть произвольной (см. рис. 23).

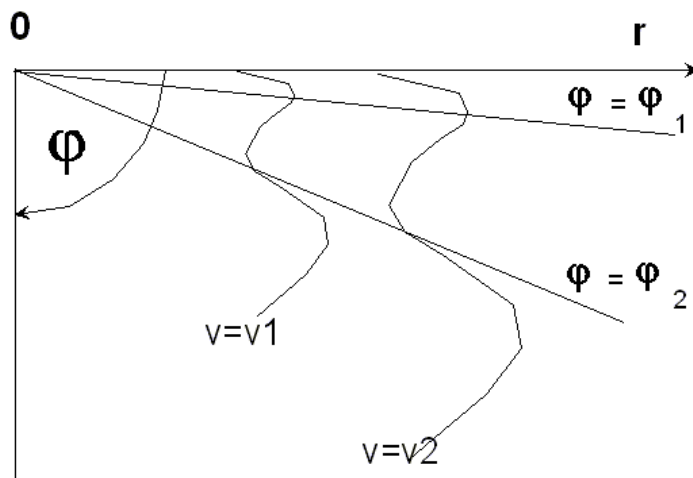


рис.23

3.5 Область определения однородных скоростных функций.

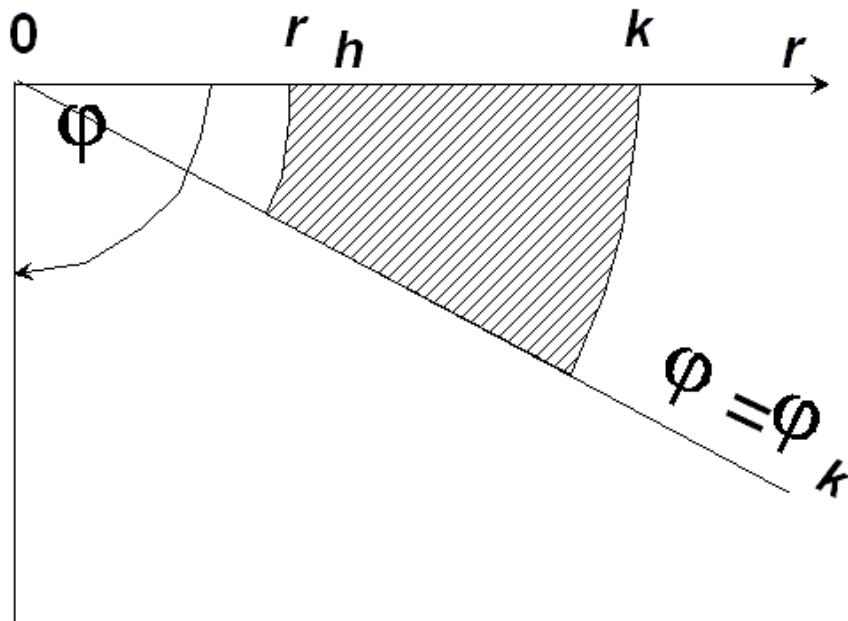


Рис.24

Область определения однородных скоростных функций.

$V = r^m \psi(\varphi)$, следовательно при $r=0$, $V=0$. Это точка на плоскости, где $\mathbf{V}=0$. не имеет физического смысла, поэтому однородные функции мы рассматриваем в ограниченной области:

$$0 < r_h \leq r \leq r_k \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_k \quad (\text{рис.24})$$

3.6 Аппроксимативные свойства однородных скоростных функций. Геологические среды, которые могут быть приближены однородными функциями.

Для того, чтобы представить себе вид скоростных полей, описываемых однородными функциями двух координат, составим таблицу. Прежде всего, нужно отметить, что функция, входящая в формулу скорости, это произвольная функция. Поэтому она может содержать линии разрыва, в соответствии с этим однородная скоростная функция может включать прямолинейные границы раздела. Рассмотрим таблицу. (Рис.25).

$$v = r^m \psi(\phi)$$

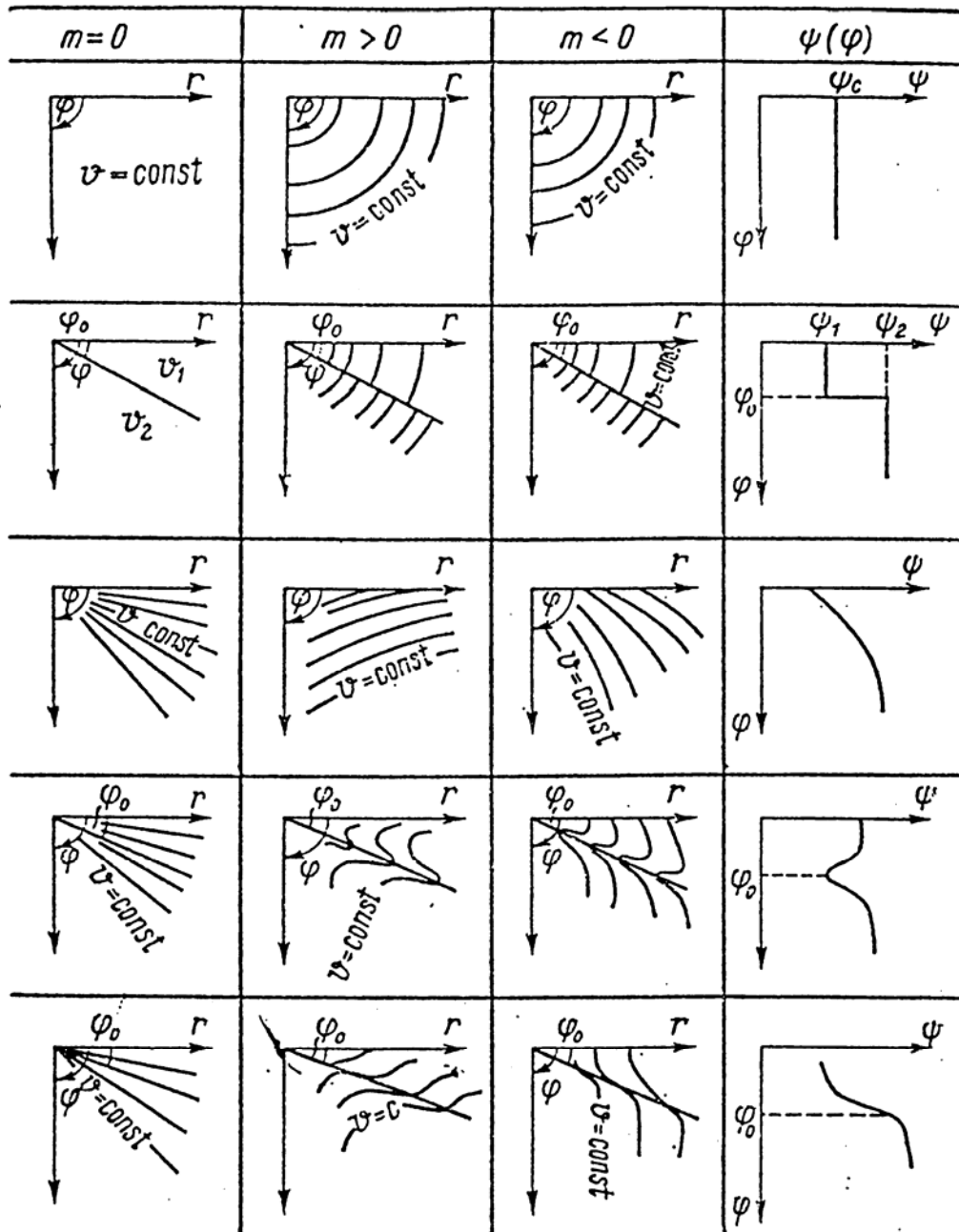


Рис. 25. Возможный вид поля линий уровня для однородных функций.

Однородные среды, однородно-слоистые, непрерывные среды, среды с границами раздела 1 и 2 рода, с волноводами, складчатые среды - однородные функции - широкий класс скоростных функций, которые включают в себя главные интерпретационные модели:

- 1) однородная среда;
- 2) двухслойная среда с наклонной границей раздела.

3.7 Вертикально-неоднородная среда как частный случай среды с однородной функцией скорости

Покажем, что вертикально-неоднородная среда также является предельным случаем некоторой однородной скоростной функции.

Сравним функции

$$v(r, \varphi) = r^m \psi(\varphi) \quad (26)$$

и

$$v_1(x, z) = x^m f(z) \quad (27)$$

Здесь x, z - декартовы координаты, $f(z)$ - произвольная функция глубины.

Рассмотрим функцию (26) также в декартовых координатах:

$$v(x, z) = (\sqrt{x^2 + z^2})^m \psi(\operatorname{arctg}(z/x)) \quad (28)$$

в области $x_0 \leq x \leq x_k, 0 \leq z \leq zk$,

где $x \gg z, x \gg \Delta x = x_k - x_0$.

Очевидно, что при этих условиях функция (17)

$$v = x^m \psi(z/x)$$

Так как значения x относительно мало меняются в этой ограниченной области,

$$= x_0 (1 + \Delta x/x_0) \approx x_0,$$

то $\psi(z/x) \approx g(z)$

или

$$v = x^m g(z).$$

Таким образом, в указанной области эти две скоростные функции близки. Если положить $m = 0$, то очевидно в этой области функция $v(x, z) = g(z)$, т.е. будет практически вертикально-неоднородной функцией. Вертикально-неоднородная функция - предельный случай однородной функции нулевой степени, когда $x \gg z$.

3.8 Вывод уравнения фронта волны для сред, где скорость волн - однородная функция.

3.8.1 Уравнение фронта волны и параметра луча

В средах, где скорость волн - однородная функция лучи подобны друг другу и образуют группы подобных лучей. Также, оказывается, что лучи имеют параметр, - величину сохраняющуюся постоянной вдоль луча. В случае однородной скоростной функции порядок уравнения луча может быть понижен.

Уравнение поля времён в полярных координатах для среды, где скорость волн однородная функция имеет вид:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^{2m}\psi^2(\varphi)} \quad (29)$$

Это нелинейное уравнение первого порядка в частных производных может быть сведено к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Преобразуем переменные по формулам:

$$T = r^{m-1} t$$

$$R = \ln(r)$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = (m-1)r^{m-2} t + r^{m-1} \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right),$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \ln(r)}\right) = (m-1) r^{m-1} t + r^m \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right) = (m-1) T + r^m \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right),$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial R}\right) - (m-1) T = r^m \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right).$$

Умножим обе части уравнения поля времён на r^{2m} , получим:

$$\begin{aligned} (r^m \partial t / \partial r)^2 + r^{2m-2} (\partial t / \partial \varphi)^2 &= 1/\psi^2(\varphi), \\ (\partial T / \partial R - (m-1) T)^2 + (\partial T / \partial \varphi)^2 &= 1/\psi^2(\varphi), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{Обозначим } \partial T / \partial R = q, \quad \partial T / \partial \varphi = p, \quad (31)$$

Перепишем уравнение:

$$(q - (m-1)T)^2 + p^2 = 1/\psi^2,$$

$$q - (m-1) T = \pm \sqrt{1/\psi^2 - p^2},$$

$$q \pm \sqrt{1/\psi^2 - p^2} = (m-1) T.$$

Будем искать решение в виде суммы двух функций:

$$T(R, \varphi) = V(R) + U(\varphi), \quad (32)$$

получим:
$$\frac{q}{m-1} \pm \frac{1}{m-1} \sqrt{\left(\frac{1}{\psi(\varphi)} - p^2\right)} = V(R) + U(\varphi),$$

или

$$\frac{q}{m-1} - V(R) = U(\varphi) \pm \frac{1}{m-1} \sqrt{\left(\frac{1}{\psi(\varphi)} - p^2\right)},$$

Здесь φ, R - две независимые переменные. При любых значениях независимых переменных функции (левая и правая части уравнения) всегда равны друг другу. Значит обе части уравнения равны некоторой константе a , a - константа разделения.

$$U(\varphi) \pm \frac{1}{m-1} \sqrt{\left(\frac{1}{\psi(\varphi)} - p^2\right)} = a \quad V \quad (33)$$

$$\frac{q}{m-1} - V(R) = a$$

(34)

Решим уравнение (34). Оно интегрируется:

$$q = \frac{dv}{dR},$$

$$1/(m-1) dV/dR - V(R) = a,$$

$$\frac{1}{m-1} \frac{dV}{dR} - V(r) = a$$

$$\frac{1}{m-1} \frac{dV}{dR} = V + a,$$

$$\frac{1}{m-1} \frac{d(V+a)}{dR} = V + a$$

$$\frac{d \ln(V+a)}{dR} = m-1$$

$$\ln(V+a) = (m-1)R + C_1,$$

$$V+a = C_1 e^{(m-1)R},$$

$$V = C_1 e^{(m-1)R} - a.$$

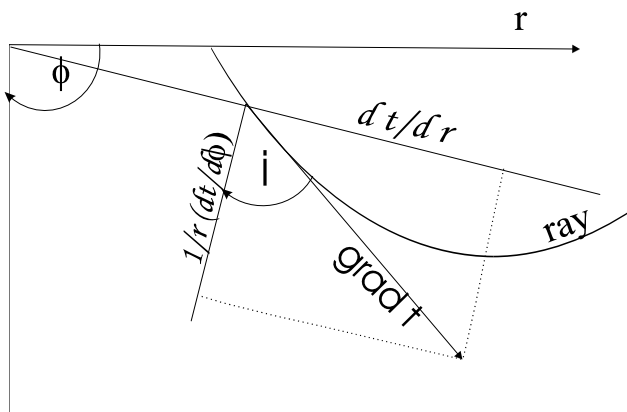


Рис.26.

Исследуем теперь уравнение (33)

$$U(\varphi) \pm \frac{1}{m-1} \sqrt{\left(\frac{1}{\psi(\varphi)} - p^2\right)^{-1}} = a$$

Рассмотрим луч в полярной системе координат (рис. 26). Известно, что

$$|\mathbf{grad} t| = 1/v$$

Направление градиента поля времени совпадает с касательной к лучу. Введём угол i -образованный касательной к лучу с направлением нормали к прямой $\varphi = \text{const}$. На рис.26 изображены составляющие градиента по осям полярной системы координат. Видно, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{\cos i}{v} = \frac{\cos i}{r^m \psi(\varphi)},$$

или

$$r^{m-1} \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{\cos i}{\psi(\varphi)},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\cos i}{\psi(\varphi)} = \frac{dU}{d\varphi} = p \quad (35)$$

Тогда уравнение (33) перепишется в виде

$$\pm \frac{1}{m-1} \sqrt{\frac{1}{\psi^2(\varphi)} - \frac{\cos^2 i}{\psi^2(\varphi)}} + U(\varphi) = a,$$

$$\frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)} + U(\varphi) = a,$$

(36)

Выбор знака связан с направлением отсчета угла i , если так как показано на рис 23, то выбираем +.

Отсюда

$$U(\varphi) = a - \frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)},$$

Заметим здесь, что функция $\sin i$ зависит только от φ

Вернемся теперь к функции

$$T = U(\varphi) + V(R).$$

$$T = a - \frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)} + C_1 e^{(m-1)R} - a,$$

$$T = -\frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)} + C_1 e^{(m-1)R}.$$

Теперь вернемся к старым переменным r, t :

$$r^{m-1} t = -\frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)} + C_1 r^{m-1}.$$

Разделим обе части уравнения на r^{m-1} , получим:

$$t = -\frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{r^{m-1} \psi(\varphi)} + C_1$$

C_1 найдём из условия $t(r_0, \varphi_0) = 0$, уравнение примет вид:

$$t = -\frac{1}{(m-1)} \frac{\sin i}{r^{m-1} \psi(\varphi)} + \frac{1}{(m-1)} \frac{\sin i_0}{r_0^{m-1} \psi(\varphi_0)}$$

отсюда

$$t = -\frac{1}{(m-1)} \frac{r \sin i}{v} + \frac{1}{(m-1)} \frac{r_0 \sin i_0}{v_0} \quad (38)$$

Если в формуле (38) положить $t = \text{const}$, получим уравнение фронта волны, если положить $i_0 = \text{const}$, получим уравнение луча (рис. 27). Для уравнения луча верно

$$(m-1)t + \frac{r \sin i}{v} = \text{const} \quad (38a)$$

Выражение (38a) определяет величину, сохраняющую постоянное значение вдоль луча - параметр луча.

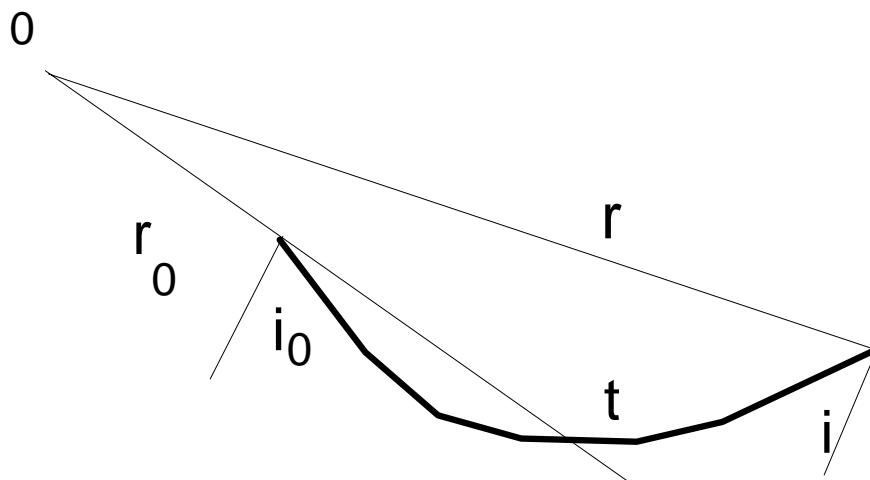


Рис. 27.

3.8.2 Дифференциальное уравнение луча. Свойства лучей.

Вернёмся к уравнению (36):

$$\frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)} + U(\varphi) = a$$

Продифференцируем его по φ , получим

$$\frac{1}{m-1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin i}{\psi(\varphi)} \right) + \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = 0.$$

Вспомним, что (35) $dU/d\varphi = \cos i / \psi(\varphi)$, тогда

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin i}{\psi(\varphi)} \right) = (1-m) \frac{\cos i}{\psi(\varphi)}. \quad (39)$$

Уравнение (39) есть дифференциальное уравнение луча в среде, где скорость волн - однородная функция. Заметим, что переменная r не входит в уравнение (39). Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, дающее для лучей зависимость углов i от углов φ . Чтобы решить уравнение первого порядка необходимо в качестве начальных условий задать точку (i_0, φ_0) , через которую проходит луч. Это начальное условие одинаково для любого значения r_0 на прямой $\varphi = \varphi_0$. Таким образом решение уравнения (39) - это зависимость $i(\varphi)$, и она будет одинаковой для любой точки r_0 на прямой $\varphi = \varphi_0$. Решение уравнения (39) имеет вид :

$$\begin{aligned}
 i &= i(\varphi, C), \\
 i_0 &= i(\varphi_0, C),
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

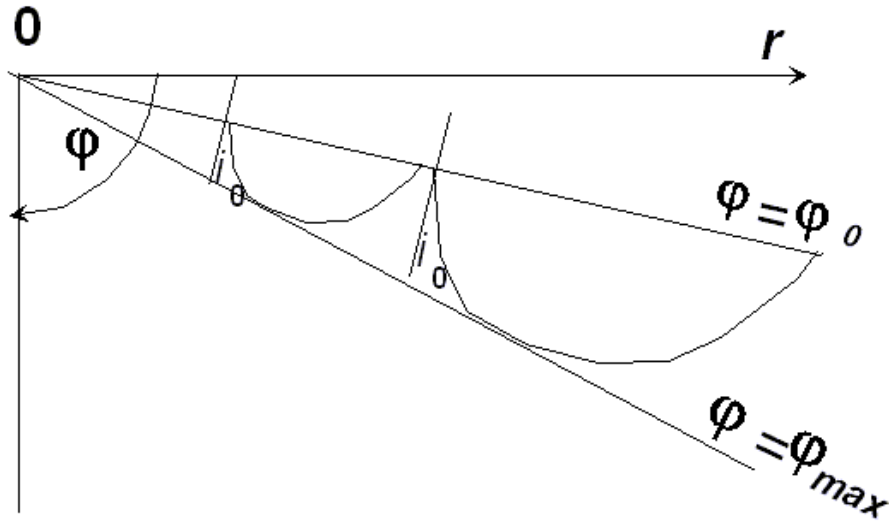


Рис.28

отсюда $C = f(i_0, \varphi_0)$, где C также зависит только от i_0, φ_0 и выделяет луч в семействе лучей проходящих через точку (r_0, φ_0) . Уравнение с начальными условиями (40) определяет лучи подобные друг другу. Касательные к подобным лучам в точках лежащих на одной радиальной прямой параллельны (рис.28).

3.9 Подобие полей времен и системы годографов на поверхности среды с однородной функцией скорости. $V = r^m \psi(\varphi)$.

3.9.1 Подобие фронтов и годографов волн

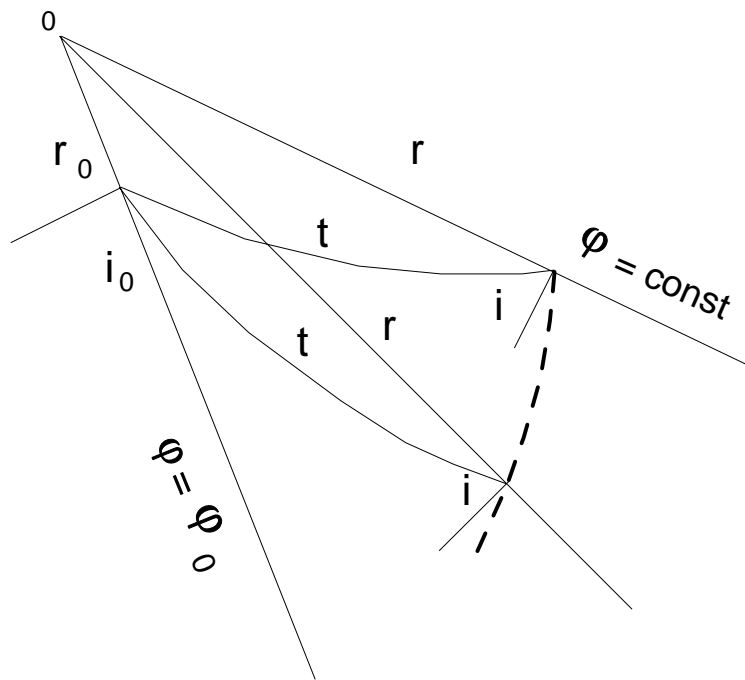


Рис. 29.

Уравнение фронта волны запишем в виде

$$r^{m-1}t = -\frac{1}{m-1} \frac{\sin i}{\psi(\varphi)} + \frac{1}{(m-1)} \frac{\sin i_0}{\psi(\varphi_0)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m-1}$$

Помня, что $\sin i$ является функцией только переменной φ , обозначим

$$t/r^{1-m} = F(\varphi, \varphi_0, r/r_0) \quad (41)$$

Введём новые переменные:

$$R = r/r_0, \quad (42)$$

$$T = t/r_0^{1-m}$$

Где r_0 - радиальная координата источника, постоянная величина, тогда получим:

$$T/R^{1-m} = F(\varphi, \varphi_0, R)$$

$$\text{или } T = R^{m-1} F(\varphi, \varphi_0, R) \quad (43)$$

r_0 - не входит в уравнение поля времён (43). Так как $r_0 = \text{const}$ в формуле (42), то преобразования (42) являются линейными преобразованиями. Уравнение поля времён (42) является инвариантным относительно линейных преобразований (42). Это означает, что все поля времён, центры которых расположены на одной радиальной

прямой $\varphi = \text{const}$, в рассматриваемых средах подобны друг другу (рис. 29). Допустим, что мы вычислили некоторое поле времён $t_1(r_1, \varphi)$ с источником в точке $r_0 = r_{01}$, $\varphi = \varphi_0$.

Введём новые координаты :

$$T = t_1 / r_{01}^{1-m},$$

$$R = r_1 / r_{01}.$$

Такое поле времён $T(R, \varphi)$ численно совпадает с полем времён, источник которого расположен в точке $r_{01} = 1$, $\varphi = \varphi_0$ на той же радиальной прямой $\varphi = \varphi_0$. Чтобы вычислить поле времён с источником в любой другой точке, например $r_0 = r_{02}$, лежащей на той же радиальной прямой $\varphi = \varphi_0$ нужно перейти к старым переменным при значении $r_0 = r_{02}$ то есть выполнить следующие линейные преобразования или:

$$r_2 = r_{02} R = (r_{02} / r_{01}) r_1 \quad - \quad (44)$$

$$t_2 = r_{02}^{m-1} T = (r_{02} / r_{01})^{1-m} t_1$$

Для того чтобы получить уравнение системы годографов на поверхности среды в уравнении поля времён (32) нужно положить $\varphi = 0$ (источники на поверхности) $\varphi_0 = 0$ (приёмники на поверхности). Получим:

$$t = r^{1-m} F(0, 0, r / r_0) = r^{1-m} T(r / r_0)$$

Или если перейти к координатам (31) $R = r / r_0$, $T = t / r_0^{1-m}$, то получим

$$T = R^{1-m} T(R) \quad (45)$$

Уравнение инвариантно относительно линейных преобразований (42). Следовательно, все годографы на поверхности среды подобны друг другу .

3.9.2 Подобные преобразования для двух нагоняющих годографов.

Пусть мы имеем годограф с источником в точке $r = r_{01}$ (рис.30) Преобразуем его координаты по формулам (42)

$$R = r_1 / r_{01}, \quad T = t / r_{01}^{1-m}$$

Получим уравнение:

$$T = R^{m-1} T(R)$$

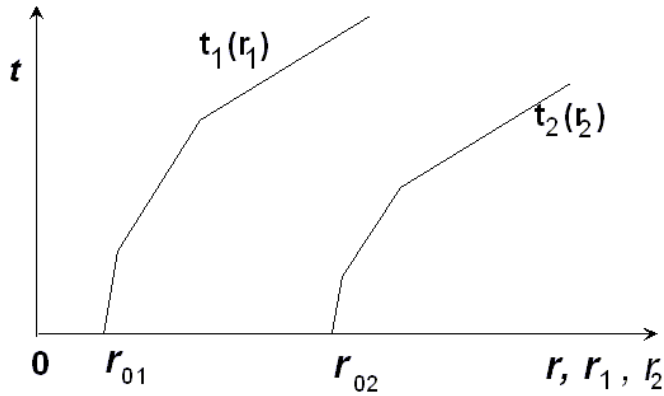


Рис. 30

Этот годограф численно совпадает с годографом, источник которого расположен в точке $r_0 = 1$ (единичный годограф). Используя полученный годограф и преобразования подобия можно вычислить годограф с источником в любой точке поверхности среды $r_0 = r_{02}$. Это делается по формулам (42) при значении $r_0 = r_{02}$

$$r_2 = r_{02} R = (r_{02} / r_{01}) r_1 \quad (46)$$

$$t_2 = r_{02}^{m-1} T = (r_{02} / r_{01})^{1-m} t_1$$

Так как в формуле скорости (25) функция $\psi(\varphi)$ - произвольная функция полярного угла, то она может иметь точку разрыва, $\varphi = \varphi^*$ где значение функции изменяется скачком, при этом двумерная скоростная функция $v = r^m \psi(\varphi)$ будет содержать прямую наклонную линию разрыва $\varphi = \varphi^*$ - границу раздела. Тогда, на поверхности среды мы зарегистрируем годограф состоящий из трёх ветвей - прямой рефрагированной волны t^p , отражённой волны t^o ,

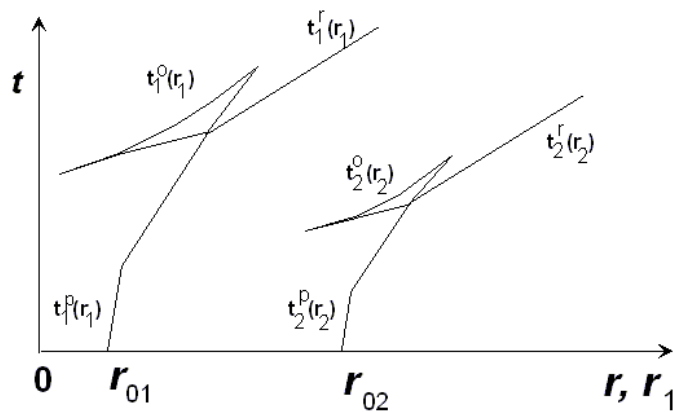


Рис. 31

преломлённо-рефрагированной волны t^r (рис.31).

3.9.3 Подобие годографов отражённых волн.

Для трёх ветвей годографа будут верны соотношения подобия (35). Для годографов отражённой волны от границы $\varphi = \varphi^*$ на поверхности среды $\varphi=0$ $t_1^o(r_1)$ и $t_2^o(r_2)$ (рис.7) подобны друг другу. Их координаты будут относиться :

$$r_2/r_1 = r_{02}/r_{01}, \quad t_2^o/t_1^o = (r_{02}/r_{01})^{1-m},$$

Рассмотренные выше преобразования (35) переводят правую ветвь годографа r_1 в правую же ветвь годографа r_2 или левую в левую, то - есть мы сформулировали соотношения подобия для нагоняющих годографов.

3.9.4 Преобразования для двух встречных годографов.

В рассматриваемых средах существуют нелинейные преобразования для двух встречных годографов, которые переводят прямой годограф в обратный и наоборот. Рассмотрим два встречных годографа - прямой $t_1(r_1)$ с источником в точке r_{01} и обратный $t_2(r_2)$ с источником в точке r_{02} , заданные на отрезке $[r_{01}, r_{02}]$. Годографы увязаны во взаимных точках: $t_1(r_{02}) = t_2(r_{01})$.

Рассмотрим произвольную точку прямого годографа t_1, r_1 (рис.32). Представим себе, что в этой точке r_1 располагается источник r_0 некоторого годографа $t(r)$. Очевидно, по принципу взаимности - $t(r_{01}) = t_1(r_0)$. Годограф $t(r)$ - это нагоняемый годограф для $t_2(r_2)$, и следовательно, они подобны. Точки годографа $t(r)$ можно преобразовать в точки годографа $t_2(r_2)$, используя формулу преобразования (35). Запишем эти преобразования для годографа $t(r)$. Используем формулы для нагоняющих годографов, получим.

$$r_2 = (r_{02}/r_0)r,$$

$$t_2 = (r_{02}/r_0)^{1-m} t.$$

Подставим в эту формулу координаты одной точки годографа $t(r)$ а именно $[t,$

$$r_2 = (r_{02} / r_0) r_{01}, \rightarrow$$

$$t_2 = (r_{02} / r_0)^{1-m} t.$$

По принципу взаимности верно $t(r_{01}) = t_1(r_1)$, причем $r_0 = r_1$.

Тогда:

$$r_2 = (r_{02} / r_1) r_{01} \tag{47}$$

$$t_2 = (r_{02} / r_1)^{1-m} t_1,$$

или

$$r_2 = \frac{r_{01} r_{02}}{r_1},$$

$$t_2 = \left(\frac{r_{02}}{r_1} \right)^{1-m} t_1.$$

Мы получили точку (t_2, r_2) на годографе $t_2(r_2)$, отвечающую произвольной точке (t_1, r_1) годографа $t_1(r_1)$ или образ точки (r_1, t_1) на годографе t_2 .

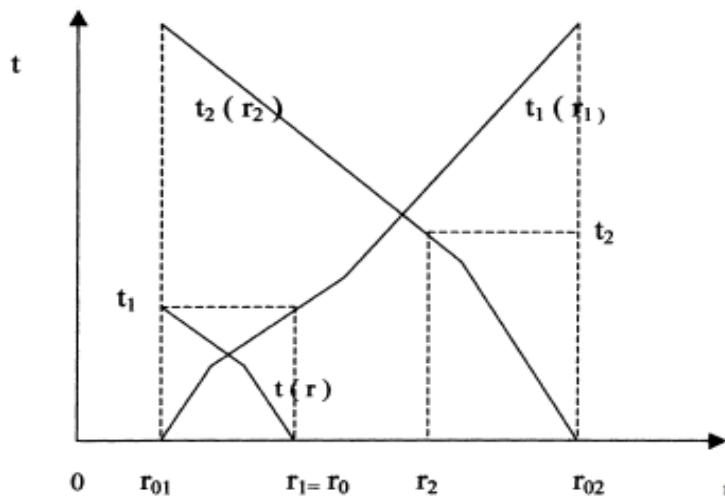


Рис. 32.

Эти нелинейные преобразования непрерывно отображают прямой годограф в обратный и наоборот. Теперь рассмотрим точки источников $(r_{01}, 0)$ и $(r_{02}, 0)$. При преобразованиях (47) они переходят друг в друга:

$$r_2 = (r_{01} / r_{02}) r_{02} = r_{01},$$

$$t_2 = (r_{02} / r_{01})^{1-m} t_1 = 0.$$

Взаимные точки также отображаются друг в друга:

$$(r_1 = r_{02}, t_1 = T) \rightarrow (r_2 = r_{01}, t_2 = T),$$

так как

$$r_2 = (r_{02} / r_{02}) r_{01} = r_{01},$$

$$t_2 = (r_{02} / r_{02})^{1-m} T = T.$$

Таким образом, поля времён, годографы и лучи в среде, где скорость волн однородная функция, образуют группу подобных друг другу лучей. Источники подобных полей времён, годографов, семейств лучей лежат на одной радиальной прямой $\varphi = \text{const}$.

3.10 Преобразование уравнения поля времен для случая однородной функции произвольной степени $V = r^m \psi(\varphi)$ к полю времен для одномерно-неоднородной среды.

Среда, где скорость волн - есть однородная функция двух координат - это двухмерно неоднородная среда или двухмерная градиентная среда. Скорость волн зависит от двух координат разреза. Однако для такой среды прямые и обратные задачи могут быть сведены к одномерным задачам.

В уравнении поля времён

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^{2m} \psi^2(\varphi)} \quad (48)$$

Преобразуем переменные по формулам:

$$\begin{aligned} \rho &= r^{1-m}, \\ \alpha &= |1-m| \varphi, \\ \tau &= |1-m| t, \end{aligned} \quad (49)$$

Получим:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial t}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{(1-m)}{r^m} \frac{\partial t}{\partial \rho} = r^{-m} \frac{\partial \tau}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = r^m \frac{\partial t}{\partial r}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}$$

Уравнение (36) перепишем в виде:

$$r^{2m} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^{2(1-m)}} \left(\frac{dt}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\psi^2(\varphi)},$$

или

$$\left(\frac{d\tau}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\tau}{d\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\psi^2\left(\frac{\alpha}{|1-m|}\right)} = \frac{1}{\xi^2(\alpha)}, \quad (50)$$

Мы получили уравнение поля времён в полярных координатах для среды, где скорость волн есть функция только полярного угла, то есть, одномерное уравнение. Это позволяет прямые и обратные задачи для таких сред свести к одномерным, а это значит упростить их в очень значительной степени. Итак, поля времён и годографы для среды со скоростью

$$v = r^m \psi(\varphi)$$

с помощью преобразований координат вида:

$$\rho = r^{1-m}$$

$$\alpha = |1-m| \varphi$$

$$\tau = |1-m| t$$

трансформируются в поля времён и годографы для среды, где скорость зависит только от полярного угла:

$$\xi = \xi(\alpha) = \psi(\varphi / |1-m|).$$

Однако для случая $m=1$, то есть для однородной скоростной функции первой степени преобразования (46) не имеют смысла, так как:

$$\rho = r^0 = 1,$$

$$\alpha = 0,$$

$$\tau = 0.$$

Это особая точка. Рассмотрим этот случай отдельно.

3.11 Преобразования уравнения поля времён для случая $m=1$ однородной скоростной функции к уравнению поля времён для вертикально-неоднородной среды.

3.11.1 Уравнение годографа в параметрической форме для среды, где скорость волн - однородная функция первой степени.

Запишем уравнение поля времён для среды ($v = r \psi(\varphi)$, $m = 1$).

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^2 \psi^2(\varphi)}$$

Умножим обе части уравнения на r^2

$$r^2 \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\psi^2(\varphi)}$$

или

$$\left(\frac{dt}{d \ln r}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\psi^2(\varphi)} \quad (51)$$

Преобразуем уравнение к декартовым координатам:

$$X = \ln r, \quad (52)$$

$$Z = \varphi.$$

$$\left(\frac{dt}{dX}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dZ}\right)^2 = \frac{1}{\psi^2(Z)}$$

Мы получили уравнение поля времён в декартовых координатах для среды, где скорость есть функция только глубины. Для таких сред имеются решения прямых и обратных задач. Следовательно, преобразования (52) трансформируют поля времён для среды со скоростью $v = r\psi(\varphi)$ в поля времён для вертикально-неоднородной среды со скоростью $v = \psi(z)$. Отсюда получаются следующие важные практические следствия:

1) В вертикально-неоднородной среде $v = v(z)$ рассмотрим угол θ , образованный лучом с вертикалью (рис.9). $\operatorname{tg} \theta = dX/dZ$. подставим координаты (52), получим

$$\operatorname{tg} \theta = d \ln r / d\varphi.$$

Преобразования (52) переводят точки (X, Z) в точки (r, φ) (рис.10). При этом, если $x = 0$, то $\ln r = 0$, или $r = 1$, $\operatorname{tg} i = d r / (r d \varphi) = d \ln r / d\varphi = \operatorname{tg} \theta$. При этих преобразованиях равенство углов сохраняется. Преобразования (41) конформны.

2) Параметр луча в вертикально-неоднородной среде: $p = \sin \theta / v(z) = \sin \theta / \psi(z)$. Отсюда для среды с однородной функцией скорости первой степени при $\theta = i, z = \varphi$

$$p = \sin i / \psi(\varphi).$$

Получим это же выражение из формулы для параметра луча в среде с однородной функцией скорости произвольной степени: $V = r^m \psi(\varphi)$

$$(m - 1)t + \frac{r \sin i}{v} = p$$

$$m = 1,$$

$$\frac{\sin i}{\psi(\varphi)} = p$$

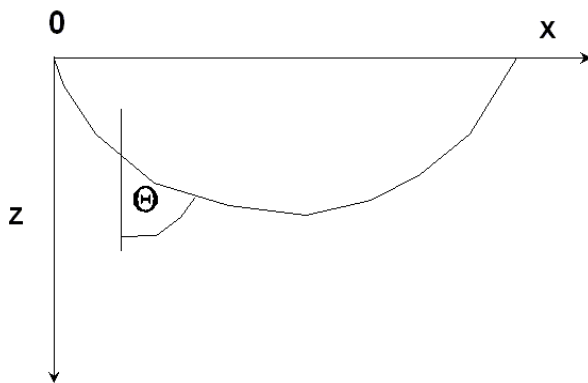


Рис. 33

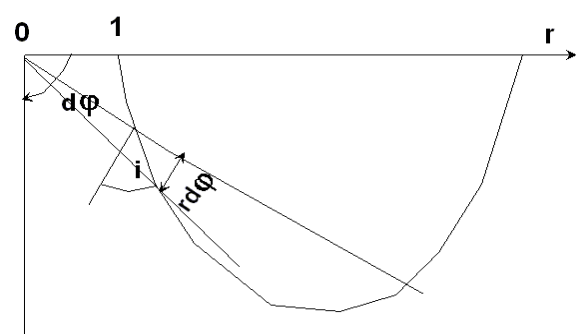


Рис. 34

В среде со скоростью $v = r\psi(\varphi)$ параметр луча имеет выражение $p = \sin i / \psi(\varphi)$.

3) Прямые задачи. Запишем уравнения годографов в параметрической форме для вертикально-неоднородной среды (рис.33) и для среды с однородной скоростной функцией первой степени (рис.34), используя

преобразования (41):

$V = \psi(z)$ <p>начальные условия $x_0 = 0, z_0 = 0$</p> $x = 2 \int_0^{z \max} \frac{p v(z) dz}{\sqrt{1 - p^2 v^2(z)}}$ $t = 2 \int_0^{z \max} \frac{dz}{v(z) \sqrt{1 - p^2 v^2(z)}}$		$V = r \psi(\varphi)$ <p>начальные условия $r_0 = 1, \varphi_0 = 0$</p> $\ln r = 2 \int_1^{\varphi \max x} \frac{p \psi(\varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \psi^2(\varphi)}}$ $t = 2 \int_0^{\varphi \max} \frac{d\varphi}{\psi^2(\varphi) \sqrt{1 - p^2 \psi^2(\varphi)}} \quad (42)$
---	--	--

3.11.2 Обратная кинематическая задача сейсмологии для среды, где скорость волн - однородная функция первой степени.

Обратные задачи для среды со скоростью $v = r \psi(\varphi)$ также могут быть решены способами, известными для вертикально - неоднородных сред. Например, способом Герглотца - Вихерта - Чибисова или способом Кондратьева. Однако если для вертикально-неоднородной среды, чтобы вычислить скоростную функцию $v = v(z)$ достаточно задать один годограф $t = t(x)$, то для среды со скоростью $v = r \psi(\varphi)$ для этого необходимы два встречных годографа $t_1(x_1)$ и $t_2(x_2)$, увязанные во взаимных точках (пара встречных или два нагоняющих или две ветви годографов из одного пункта взрыва. Пусть заданы два встречных годографа на поверхности среды $t_1(x_1)$ и $t_2(x_2)$ на интервале $[x_{01}, x_{02}]$, где x_{01} и x_{02} - декартовы координаты источников (x - значение пикетов профиля в метрах или километрах (рис.35)

Найдём по эти данным распределение скорости в среде в виде функции $v = r \psi(\varphi)$.

Мы предполагаем, что начало полярной системы координат находится в неизвестной

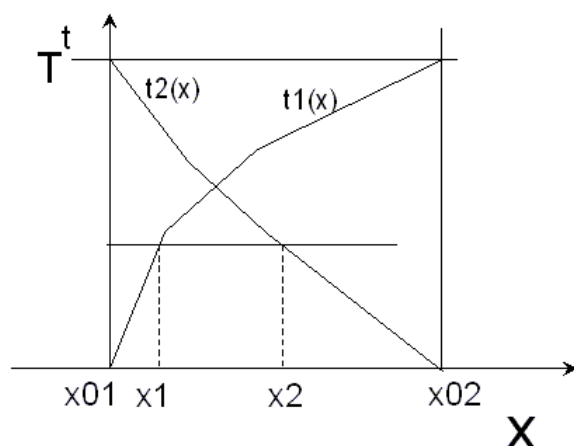


Рис.35

точке профиля справа или слева от расстановки, то есть будем предполагать, что на поверхности среды при $\varphi=0$

$$r = |x + C|.$$

Если скорость в среде – однородная функция, то прямой годограф может быть преобразован в обратный в полярной системе координат по формулам (47).

$$r_2 = (r_{01} / r_1) r_{02},$$

$$t_2 = (r_{02} / r_1)^{1-m} t_1.$$

Запишем эти равенства в координатах профиля (в декартовой системе координат).

$$x_2 + C = (x_{01} + C) (x_{02} + C) / (x_1 + C),$$

$$t_2 = (x_{02} + C)^{1-m} t_1 / (x_1 + C)^{1-m} \quad (54)$$

при $m = 1$ второе равенство запишется в виде:

$$t_2 = t_1.$$

Времена в точках, которые преобразуются друг в друга, равны. Если на заданных годографах (рис.30) провести горизонтальную черту, то получим значения x_1 и x_2 для двух таких точек. Так как x_{01} и x_{02} известны, то значение C можно найти из первого из уравнений (54).

$$x_2 + C = (x_{01} + C) (x_{02} + C) / (x_1 + C) \Rightarrow$$

$$(x_2 + C) (x_1 + C) = (x_{01} + C) (x_{02} + C) \Rightarrow$$

$$x_1 x_2 + C x_2 + C x_1 + C^2 = x_{01} x_{02} + C x_{02} + C x_{01} + C^2 \Rightarrow$$

$$C x_1 + C x_2 - C x_{02} - C x_{01} = x_{01} x_{02} - x_1 x_2 \Rightarrow$$

$$C = (x_{01} x_{02} - x_1 x_2) / [(x_1 + x_2) - (x_{01} + x_{02})] \quad (55)$$

Значение C определяется как разность произведений, делённая на разность сумм источников и приёмников. Если бы реальная среда в точности соответствовала некоторой функции $v = r\psi(\varphi)$, то для любых двух точек на заданных годографах получилось бы одинаковое значение C . Однако реальная среда сложнее. Определим C для нескольких пар точек, времена которых равны, и потом вычислим C как среднеарифметическое значение:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i / n \quad (n = 7 \div 10)$$

Чем меньше разброс значений C , тем меньше реальная среда отличается от аппроксимирующей функции. Затем перейдём от декартовых координат к полярным по формулам (рис.36)

$$r = |x + C|$$

$$r_{01} = |x_{01} + C|$$

$$r_{02} = |x_{02} + C|.$$

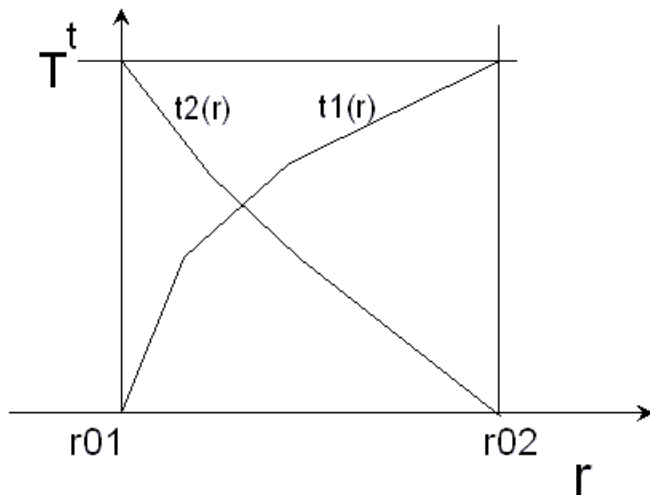


Рис.36

После этого наблюдаемые годографы преобразуем в годографы, отвечающие вертикально-неоднородной среде со скоростью $v = \psi(z)$. Для этого построим их в полулогарифмическом масштабе (рис.37).

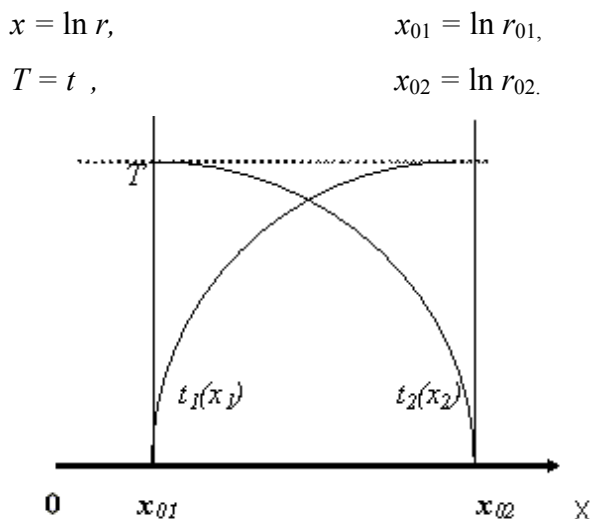


Рис.37

Построенные в таких координатах годографы $T_1(x_1)$, $T_2(x_2)$ должны быть выпуклыми и идентичными друг другу. То есть, если совместить их пункты взрыва, то они должны совпасть. Однако для реальных сред они будут отличаться друг от друга. Совместим их пункты взрыва и осредним годографы. Это означает, что если взять времена годографов в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от источников, то нужно вычислить среднее из этих времён.

$$T(x_1) = (1/2) (T_1(x_{01} + \Delta x) + T_2(x_{02} - \Delta x))$$

пусть

$$0 \leq \Delta x \leq x_{02} - x_{01},$$

$$x_1 = x_{01} + \Delta x$$

$$\Delta x = x_1 - x_{01}$$

Будем считать, что вычисленный таким образом $T(x_1)$ в точности соответствует некоторой вертикально-неоднородной среде, где скорость есть неизвестная функция глубины $v = \psi(z)$. Найти её можно теперь известными способами Герглотца - Вихерта - Чибисова или, приближённо, способом Кондратьева. В результате вычислим кривую $\psi(\varphi) = v(z)$ (км/с или м/с). Значения $\varphi = z$ будут получены в радианах.

Как построить разрез? Находим положение начала полярной системы координат однородной скоростной функции. Пусть $C < -x_{02}$. C - отрицательна. Тогда отрезок, равный C нужно отложить влево от точки $x = 0$. Чтобы ограничить приближённо область, где скорость описывается формулой $v = r \psi(\varphi)$, необходимо провести граничный луч, соединяющий точки источников. Заменяем его дугой окружности, для этого через середину отрезка $[x_{01}, x_{02}]$ проведём перпендикуляр к прямой $\varphi = \varphi_{max}$. Получим точку M , и затем через три точки x_{01} , x_{02} и M проведём дугу окружности. Внутри этой окружности скорость можно найти по формуле:

$$v = ((X_1 + C)^2 + Z^2)^{1/2} \psi(\arctg(Z / |X + C|)).$$

Возьмём любую точку (x^*, z^*) внутри этой окружности в декартовых координатах, тогда

$$r^* = ((x^* + C)^2 + z^{*2})^{1/2},$$

$$\varphi^* = \arctg(z^* / (x^* + C)).$$

Значение $\psi(\varphi^*)$ снимем с графика $\psi(\varphi)$. Вычислив несколько таких значений, можно построить изолинии скорости внутри граничного луча. Этим способом можно вычислить поле скорости на калькуляторе. Однородная функция первой степени - это частный случай однородных функций. Скорость всегда возрастает по падению границы раздела и по радиальной координате изменяется линейно.

3.12 Обратная кинематическая задача сейсмологии для среды, где скорость волн - однородная функция произвольной степени.

3.12.1 Постановка задачи

Пусть заданы два встречных годографа первых волн: $t_1(x_1)$ с источником в точке x_{01} и $t_2(x_2)$ с источником в точке x_{02} , увязанные во взаимных точках (рис.38). Предполагается, что скоростное распределение может быть аппроксимировано функцией вида: $v = r^m \psi(\varphi)$. Значения радиальных координат r , нам неизвестны. Также как и выше,

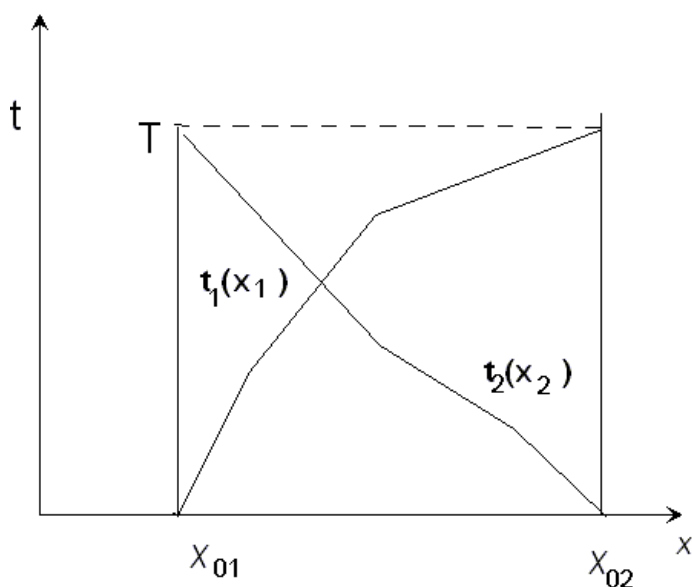


Рис.38.

предполагаем, что начало полярной системы координат находится в неизвестной точке профиля слева или справа от расстановки. Отсюда на поверхности среды при $\varphi = 0$, имеем

$$r = |x + C|,$$

$$r_{01} = |x_{01} + C|,$$

$$r_{02} = |x_{02} + C|,$$

где C - неизвестная константа . Значения полярных координат разреза определяются по формулам:

$$r = \sqrt{(x + C)^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{z}{|x + C|}\right)$$

Неизвестными, таким образом, в этой задаче являются параметры скоростного закона m и C , а также значения функции $\psi(\varphi)$. Необходимо положить ограничения на искомые параметры. Практика показывает, что достаточно искать значения m в диапазоне $-3 \leq m \leq 3$. Ограничения на C мы получим, решив систему неравенств:

Так как $r=0$ не может находиться внутри интервала x_{01}, x_{02}

$$\left| \begin{array}{l} r_{01} > 0, \\ r_{02} > 0, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} r_{01} < 0, \\ r_{02} < 0. \end{array} \right.$$

Отсюда получим $C > -x_{01}$, $C < -x_{02}$ (рис. 39)



Рис. 39. Область определения C .

Известно, что в случае, когда скорость в среде есть функция вида (25) прямой $t_1(x_1)$ и обратный $t_2(x_2)$ годографы связаны между собой формулами:

$$r_2 = \frac{r_{01} r_{02}}{r_1}$$

$$t_2 = \left(\frac{r_{02}}{r_1} \right)^{1-m} t_1$$

или в декартовой системе координат:

$$t_2 = \left(\frac{|x_{02} + C|}{|x_1 + C|} \right)^{1-m} t_1$$

Возьмём произвольные значения m и C и преобразуем обратный годограф в прямой. Для этого выберем произвольную точку x_1 на прямом годографе $t_1(x_1)$. Соответствующая этой точке точка x_2 на годографе $t_2(x_2)$ (x_2 - образ точки x_1) определяется по формулам:

$$x_2 = \frac{(x_{01} + C) \times (x_{02} + C)}{(x_1 + C)} - C$$

Возьмём время t_2 в найденной точке x_2 и пересчитаем его обратно в точку x_1 по формуле:

$$t_1^n = \left(\frac{x_1 + C}{x_{02} + C} \right)^{1-m} t_2$$

Получим значение прямого преобразованного годографа. Очевидно, время t_1^n будет сильно отличаться от наблюдаемого времени t_1 в этой точке (рис. 40). Точки же источников и взаимные точки, то есть концы годографов, при любых значениях m и C преобразуются друг в друга. Возьмём точку $x_1 = x_{01}$, $t_1(x_{01})=0$, тогда

$$x_2 = \frac{(x_{01} + c)(x_{02} + c)}{(x_{01} + c)} - c = x_{02}$$

$$t_2 = \left(\frac{x_{02} + c}{x_{01} + c} \right)^{1-m} t_1 = 0$$

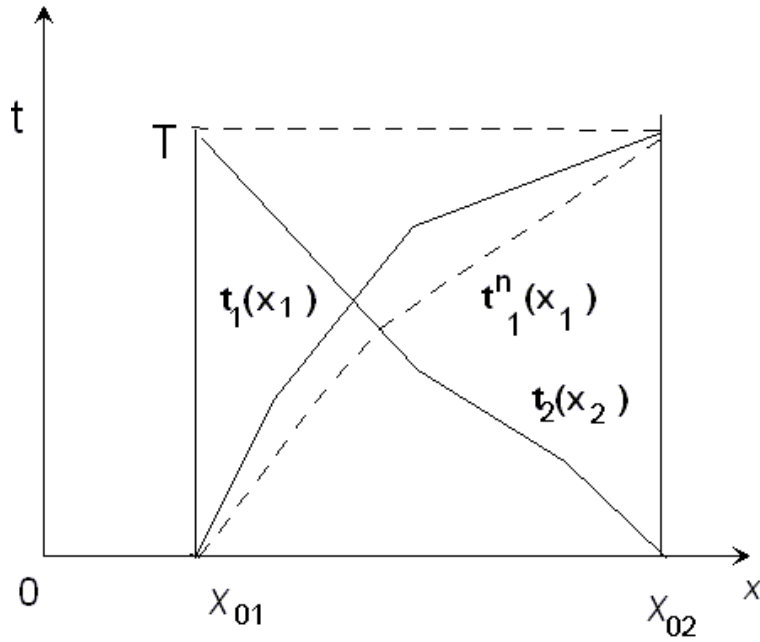


Рис.40.

для точки $t_1(r_{02}) = T$ другого конца годографа $t_1(r_1)$, получим:

$$x_2 = \frac{(x_{01} + c)(x_{02} + c)}{x_{02}} - c = x_{01}$$

$$t_2 = \left(\frac{x_{02} + c}{x_{02} + c} \right)^{1-m} t_1 = T$$

Таким образом, преобразованный прямой годограф t_1^n будет отличаться от наблюдаемого прямого, так как показано на рис.40. Пусть на годографе $t_1(x_1)$,

имеется n точек, тогда среднее квадратическое отклонение прямого наблюденного годографа от преобразованного прямого при произвольных значения параметров может быть записано в виде:

$$\sigma(c, m) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \left(t_1(x_{1i}) - t_1^n(x_{1i}) \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$t_1^n = \left(\frac{x_{i1} + C}{x_{i2} + C} \right)^{1-m} \times t_2 \left(\frac{(x_{01} + C)(x_{02} + C)}{x_{i1} + C} - C \right)$$

$\sigma(c, m)$ - функция двух переменных, параметров m и C . Необходимо найти такие значения m и C , при которых данное среднеквадратическое отклонение минимально: $\sigma(c, m) = \min$, то есть необходимо найти координаты m и C точки минимума. Значения этих координат будем считать параметрами искомой скоростной функции.

3.12.2 Поиск минимума функции нескольких переменных.

Минимум функции нескольких переменных может быть найден численными методами на компьютере. Существуют алгоритмы такого поиска. Например, известный алгоритм градиентного спуска. Рассмотрим метод прямого поиска минимума функции нескольких переменных. Существует стандартная процедура- DIRECTSEARCH такого поиска. Как построен алгоритм?

Рассмотрим рис.41

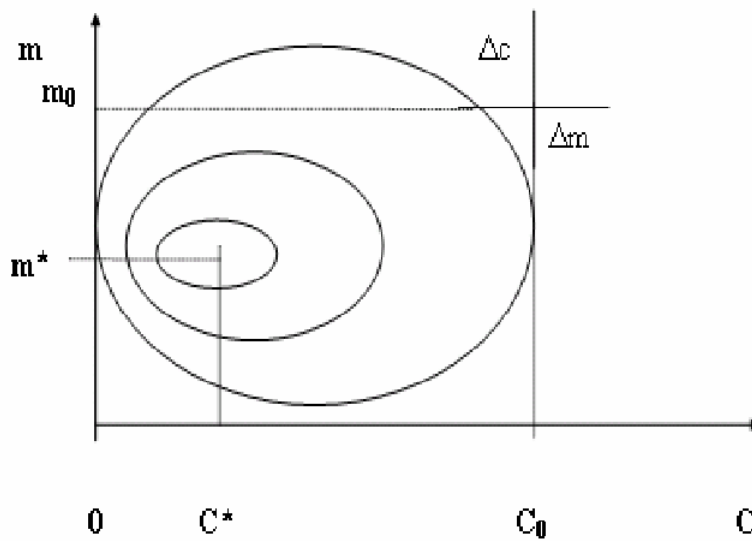


Рис.41

На рисунке 41 изображены изолинии функции $\sigma(c, m) = \text{const}$. Выберем произвольную начальную точку m_0, c_0 . У нас есть алгоритм (формула), позволяющая вычислить функцию $\sigma(c, m)$. Вычислим значение этой функции в начальной точке. Зададим некоторый шаг $\Delta c, \Delta m$ и вычислим значения $\sigma(c, m)$ ещё в четырёх точках: $\sigma(c_0, m_0 + \Delta m), \sigma(c_0, m_0 - \Delta m), \sigma(c_0 + \Delta c, m_0), \sigma(c_0 - \Delta c, m_0)$, то есть, определим значения функции σ для некоторой расстановки типа крест. Затем выберем из этих значений минимальное. В данном случае это будет $\sigma(c_0, m_0 - \Delta c)$ и переместим центр расстановки в эту точку. Далее процедура вычислений повторяется. Крест будет ползти в сторону минимума. Если минимальное значение получается в центральной точке креста - шаг дробится. Алгоритм процедуры прямого поиска становится понятнее, если рассмотреть обращение к процедуре DIRECTSEARCH.

DIRECTSEARCH (N(число переменных), RHO(параметр уменьшения шага поиска), DL(наименьший шаг), MF(процедура вычисления значений функции), M(максимальное число вычислений функции), MX(начальный шаг), D(координаты минимума), MFS(значение функции в точке минимума), P₁ (логическая переменная,

если P_1 - истинно, то найден минимум, если P_1 - ложно выход из процедуры осуществлён при достижении количества вычислений функции больше значения M).

Структура линий уровня функции σ нам не известна - функция может содержать несколько минимумов. Эта проблема решается следующим образом: задаём несколько значений начальных точек, в нашем случае - 4. Вычислим координаты четырёх точек минимума. А затем выберем из них ту, в которой значение σ наименьшее.

В рассмотренном случае, мы считаем функцию σ функцией двух переменных. Однако, как мы сейчас увидим, эта задача может быть сведена к поиску функции одной переменной. Действительно, если для пары годографов, задано некоторое произвольное значение параметра C , то оптимальное значение m степени однородной аппроксимирующей функции может быть вычислено. Возьмём произвольную точку прямого годографа x_1, t_1 . Зададим некоторое значение C . Соответствующая точка x_2 (образ точки x_1), при заданном значении C может быть найдена по формуле:

$$x_2 = \frac{(x_{01} + C)(x_{02} + C)}{(x_1 + C)} - C$$

Возьмём значение t_2 в точке x_2 . Известно, что:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{x_{02} + C}{x_1 + C} \right)^{1-m}$$

отсюда:

$$\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right) = (1-m) \times \ln\left(\frac{x_{02} + C}{x_1 + C}\right)$$

$$(1-m) = \frac{\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_{02} + C}{x_1 + C}\right)} = A$$

$$m = 1 - A$$

Взяв несколько точек $\{x_{1i}\}_{i=1}^n$ прямого годографа вычислим $\{x_{2i}\}_{i=1}^n$, для каждой пары точек $\{x_{1i}, x_{2i}\}_{i=1}^n$ можно вычислить своё значение m_i , а затем вычислить среднеарифметическое значение:

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i}{n}$$

После этого для заданного C и вычисленного m необходимо найти среднеквадратическое отклонение прямого наблюдаемого от преобразованного прямого $\sigma(C, m)$. В этом случае σ является функцией только одного переменного C . Таким образом можно вести поиск минимума функции $\sigma(C)$ передвигаясь только по одной координате C . Это уменьшает время счёта примерно в пять раз. Точность вычислений при этом не теряется. Итак, минимум найден. Пусть это будут значения m^*, C^* .

3.12.3 Вычисление среднего годографа, отвечающего аппроксимирующей функции.

Трансформируем годографы к полярным координатам по формулам:

$$r = |x + C^*|$$

$$r_{01} = |x_{01} + C^*|$$

$$r_{02} = |x_{02} + C^*|$$

и преобразуем обратный годограф в прямой по формулам:

$$t_1^n(r) = \left(\frac{r}{r_{02}}\right)^{1-m^*} \times t_2\left(\frac{r_{01} \times r_{02}}{r}\right)$$

t_1^n - преобразованный прямой годограф, r - произвольная точка прямого годографа. Найдём средний годограф между прямым наблюдаемым и прямым преобразованным годографами по формуле:

$$\bar{t}(r) = \frac{1}{2} \times (t_1(r) + t_1^n(r))$$

Будем считать, что этот годограф точно соответствует некоторой искомой скоростной функции вида:

$$V = r^m \psi(\varphi) \tag{56}$$

среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma^* = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (t_1^2(r) - \bar{t}_1^2(r)) \right)^{1/2}$$

характеризует степень отклонения реальной среды от аппроксимирующей функции - погрешность аппроксимации.

3.12.4 Сведение обратной двухмерной задачи к одномерной.

В функции (56) остаётся неизвестной лишь функция $\psi(\varphi)$ - полярного угла. Воспользуемся теперь тем свойством годографов для функции (56), что их можно преобразовать в годографы для среды, где скорость зависит только от одной координаты- полярного угла. Для этого преобразуем средний годограф по формулам:

$$\tau = |1 - m| \times \bar{t}$$

$$\rho = r^{1 - m}$$

$$\rho_0 = r_{01}^{1 - m}$$

Получим годограф $\tau(\rho)$ с источником в точке ρ_0 . Используя этот годограф необходимо найти скоростную функцию полярного угла $\xi = \xi(\alpha)$.

Будем искать функцию $\xi(\alpha)$ как некоторую возрастающую функцию полярного угла α . Для случая вертикально-неоднородной среды $V = V(z)$ мы знаем, что если $V(z)$ -непрерывная возрастающая функция z - то годограф есть выпуклая кривая и прежде чем вычислять скорость по формуле Герглоца-Вихерта годограф должен быть аппроксимирован выпуклой кривой.

3.12.5 Вид годографа для среды с однородной функцией скорости нулевой степени

Покажем теперь, что в случае, если скорость есть кусочно-непрерывная возрастающая функция полярного угла α , - годограф тоже является выпуклой кривой. Рассмотрим это подробнее.

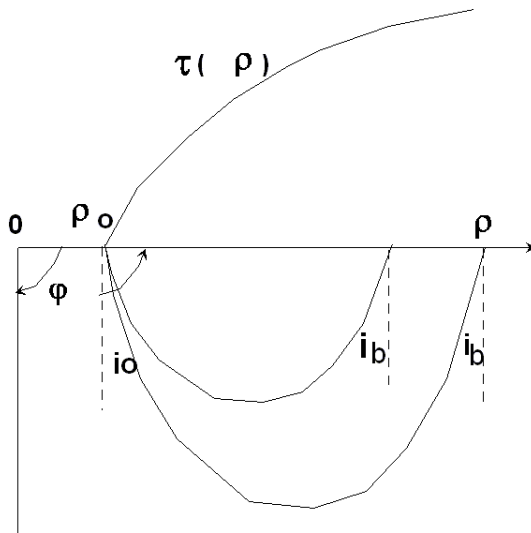


Рис. 42.

В средах, где скорость волн есть однородная функция двух координат - лучи имеют параметр. Выражение для параметра:

$$(m-1)t = \frac{\sin i_0}{V_0} r_0 - \frac{\sin i}{V} r$$

для нашего случая $m=0$, $t = \tau$, $r = \rho$, $V = \xi$, имеем для годографов на поверхности среды (рис. 42):

$$-\tau = \frac{\sin i_0}{\xi_0} \rho_0 - \frac{\sin i_b}{\xi_0} \rho, \text{ где } i_b \text{ - угол выхода луча на поверхность среды,}$$

$$\sin i_0 = \frac{\xi_0}{\rho_0} \frac{\sin i_b}{\xi_0} \rho - \frac{\xi_0}{\rho_0} \tau.$$

Так как по закону Бендорфа

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = \frac{\sin i_b}{\xi_0}$$

$$\sin i_0 = \frac{\xi_0}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \rho - \frac{\xi_0}{\rho_0} \tau$$

продифференцируем по ρ :

$$\frac{\partial \sin i_0}{\partial \rho} = \frac{\xi_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \rho^2} \rho + \frac{\xi_0}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} - \frac{\xi_0}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = \frac{\xi_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \rho^2} \rho$$

$$0 \leq i \leq \pi/2; \rho, \rho_0 > 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial i_0}{\partial \rho}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \rho^2}\right),$$

$$\frac{\partial i_0}{\partial \rho} > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$\frac{\partial i_0}{\partial \rho} < 0 \Rightarrow k < 0$$

В случае прямых ветвей - годограф выпуклый, в случае обратных - вогнутый. Если угол входа лучей i_0 убывает с увеличением расстояния ρ по годографу - ветвь прямая и она выпуклая ($\partial^2 \tau / \partial \rho^2 < 0$, $\partial \tau / \partial \rho$ -убывает - V^* -возрастает, ветвь выпуклая). Если с увеличением расстояния ρ угол i_0 возрастает, то ветвь обратная. Если $\partial^2 \tau / \partial \rho^2 > 0$, то $\partial \tau / \partial \rho$ возрастает, V^* -как обратная функция к $\partial \tau / \partial \rho$ - убывает и ветвь годографа вогнутая.

Мы рассматриваем эти величины в точках, где годограф имеет вторую производную. Если скорость, как мы предполагаем, непрерывная возрастающая функция, то годограф - непрерывная дифференцируемая кривая, следовательно, эта кривая выпуклая.

3.12.6 Алгоритм численного восстановления функции полярного угла $\xi = \xi(\alpha)$ по годографу $\tau(\rho)$.

Итак прежде чем находить скорость $\xi = \xi(\alpha)$ по вычисленному годографу, этот годограф должен быть аппроксимирован выпуклой кривой. Искомую непрерывную возрастающую функцию $\xi = \xi(\alpha)$ заменим кусочно-постоянной функцией вида, описывающей множество слоев с постоянной скоростью.

$$\xi_1^*(\alpha) = \begin{cases} \xi_0 (0 \leq \alpha \leq \alpha_1) \\ \xi_1 (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n (\alpha_n \leq \alpha) \end{cases}$$

$$\{\xi_{i+1} > \xi_i\}_{i=0}^n = 0.$$

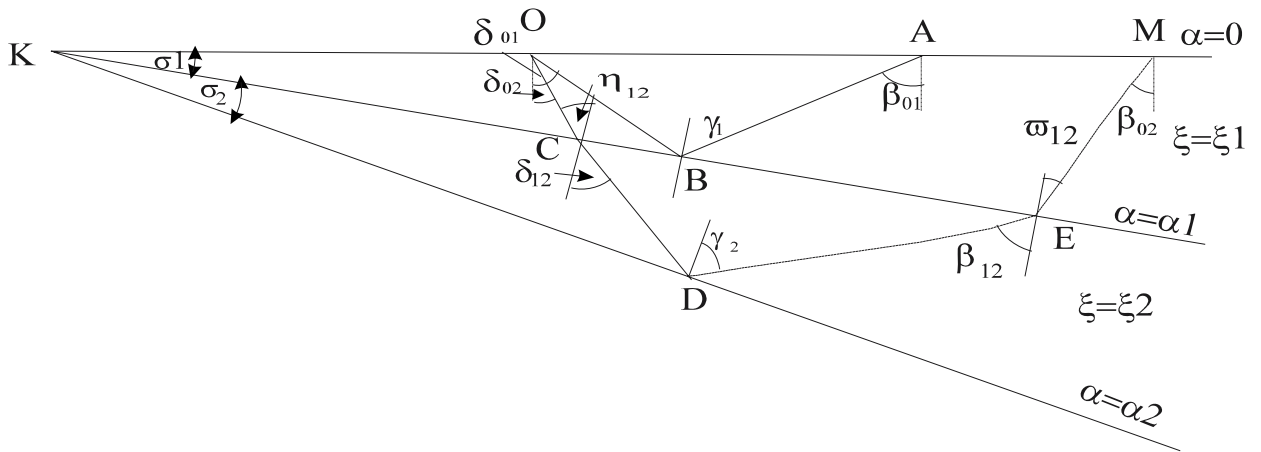


Рис. 43

Тогда сейсмическая среда будет выглядеть как на рис.38, так как $\xi_1^*(\alpha)$ функция полярного угла, то элементарные слои - это некоторые клиновидные слои с постоянной скоростью $\xi = \xi_i$ (рис.43)

Годограф первых волн в такой среде есть ломаная линия, состоящая из прямолинейных годографов головных волн. Если число слоёв устремить к бесконечности, а скачки скорости на границах к нулю, то в пределе получим искомую функцию $\xi = \xi(\alpha)$. Мы будем считать, что в среде столько слоёв сколько точек на годографе $\tau(\rho)$. Если годограф задан дискретно: $\{\rho_k, \tau_k\}_{k=0}^n$, то в среде n слоёв.

Лучи будем отмечать индексом k , границы элементарных слоёв разреза индексами:

$\{l\}_l^n = 0$. Угловые мощности слоёв будем обозначать σ_l . На каждой элементарной границе раздела лучи испытывают преломление и при падении волны на границу под критическим углом возникает головная волна. Будем рисовать только лучи отразившиеся от границ под критическим углом, то есть будем считать, что годограф состоит из начальных точек головных волн (рис.43).

Углы выхода лучей из слоя l обозначим буквой β_{kl} , углы входа в слой l обозначим δ_{kl} , критические углы γ_l . Скорость в верхнем слое определяется по формуле:

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_0} = \frac{1}{\xi_0}$$

$$\xi_0 = \left. \frac{1}{\partial \tau / \partial \rho} \right|_{\rho = \rho_0}$$

Чтобы определить углы выхода лучей продифференцируем годограф $\tau(\rho)$ в точках $\rho = \rho_k$:

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_k} = \frac{\sin \beta_{0k}}{\xi_0}$$

$$\left\{ \beta_{0k} = \arcsin \left(\xi_0 \left. \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_k} \right) \right\}_{k=1}^n$$

Углы входа луча найдём, используя выражение для параметра луча:

$$(m-1)t = \frac{\sin i_0}{V_0} r_0 - \frac{\sin i}{V} r_k$$

Для нашей задачи имеем, так как мы рассматриваем точки на поверхности среды:

$$-\tau_k = \frac{\sin \delta_{0k}}{\xi_0} \rho_0 - \frac{\sin \beta_{0k}}{\xi_0} \rho_k$$

отсюда

$$\left\{ \delta_{0k} = \arcsin \left(\frac{\xi_0}{\rho_0} \left(\frac{\sin \beta_{0k}}{\xi_0} \rho_k - \tau_k \right) \right) \right\}_{k=1}^n$$

Мы нашли углы входа δ_{ok} и выхода β_{ok} для всех лучей. Обозначим σ_l - угловые мощности элементарных слоёв.

Рассмотрим ΔKOB . Запишем сумму углов этого треугольника:

$$\begin{aligned}\sigma_1 + (90 + \delta_{01}) + (90 - \gamma_1) &= 180 \\ \sigma_1 + \delta_{01} - \gamma_1 &= 0\end{aligned}\tag{57}$$

Для треугольника KAB сумма углов выражается формулой:

$$\begin{aligned}\sigma_1 + (90 - \beta_{01}) + (90 + \gamma_1) &= 180 \\ \sigma_1 - \beta_{01} + \gamma_1 &= 0\end{aligned}\tag{58}$$

сложим (46) и (47), получим : $2\sigma_l + \delta_{0l} - \beta_{0l} = 0$; отсюда

$$\sigma_1 = \frac{\beta_{01} - \delta_{01}}{2}$$

Вычтем из выражения (57) выражение (58) и получим:

$$\delta_{01} + \beta_{01} - 2\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta_{01} + \beta_{01}}{2}$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{\xi_0}{\xi_1}$$

$$\xi_1 = \frac{\xi_0}{\sin \gamma_1}$$

Итак, мы нашли угловую мощность первого слоя σ_l и скорость во втором слое ξ_l . Будем использовать рекурсивный способ решения задачи. Все лучи выходящие на поверхность среды продолжим теперь на первый уровень $l=1$. Вычислим углы выхода лучей на границу $l=1$ и углы входа лучей в слой со скоростью $\xi = \xi_l$

$$\left\{ \delta_{1,k} \right\}_{k=2}^n, \left\{ \beta_{1,k} \right\}_{k=2}^n$$

Для этого введём углы падения на границу $l=1$:

$$\eta_{1,2}, \omega_{1,2},$$

$$\left\{ \eta_{1,k} \right\}_{k=2}^n, \left\{ \omega_{1,k} \right\}_{k=2}^n$$

Рассмотрим ΔOKC . Сумма углов этого треугольника равна:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 + (90 + \delta_{02}) + (90 - \eta_{12}) &= 180 \\
\sigma_1 + \delta_{02} - \eta_{12} &= 0 \\
\eta_{12} &= \sigma_1 + \delta_{02} \\
\{\eta_{1k} = \sigma_1 + \delta_{0k}\}_{k=2}^n
\end{aligned}$$

Из треугольника ΔKME получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 + (90 - \beta_{02}) + (90 + \omega_{12}) &= 180 \\
\sigma_1 - \beta_{02} + \omega_{12} &= 0 \\
\omega_{12} &= \beta_{02} - \sigma_1 \\
\{\omega_{1k} = \beta_{0k} - \sigma_1\}_{k=2}^n
\end{aligned}$$

Запишем закон преломления на границе $l=1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \eta_{1k}}{\sin \delta_{1k}} = \frac{\xi_0}{\xi_1}, \quad \frac{\sin \omega_{1k}}{\sin \beta_{1k}} = \frac{\xi_0}{\xi_1} \\
\left\{ \delta_{1k} = \arcsin \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \sin \eta_{1k} \right) \right\}_{k=2}^n \\
\left\{ \beta_{1k} = \arcsin \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \sin \omega_{1k} \right) \right\}_{k=2}^n
\end{aligned}$$

Мы нашли углы входа и выхода всех лучей для второго слоя. Далее процесс повторяется, мощность второго слоя :

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \frac{\beta_{12} - \delta_{12}}{2} \\
\gamma_2 &= \frac{\beta_{12} + \delta_{12}}{2} \\
\sin \gamma_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \xi_2 &= \frac{\xi_1}{\sin \gamma_2}
\end{aligned}$$

Далее повторяя этот процесс до последнего слоя, находим таблицу значений

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0, \quad \xi = \xi_0, \\
\alpha_1 &= \sigma_1 \quad \xi = \xi_1,
\end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \xi = \xi_2,$$

.....

$$\alpha_i = \sigma_1 + \dots + \sigma_i, \quad \xi = \xi_i,$$

.....

$$\alpha_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_n, \quad \xi = \xi_n,$$

Итак, мы определили функцию $\xi(\alpha)$. Вернемся к старым координатам:

$$r = \rho^{1/(1-m)},$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{|1-m|},$$

$$\psi = \xi,$$

$$r_0 = \rho_0^{1/(1-m)},$$

$$v = r^m \psi(\varphi)$$

При вычислении функции $\xi(\alpha)$ мы вычисляли и лучи. Последний луч, соединяющий точки источников необходимо запомнить, чтобы ограничить область разреза, где скоростное поле отвечает найденной функции.

3.13 Локальная аппроксимация скоростного поля однородными функциями. Метод однородных функций – аналог метода ОГТ для преломленных волн

Назовем скоростное поле, рассчитанное для некоторой пары встречных годографов внутри граничного луча, локальным полем скорости. При сложной системе годографов скоростной разрез строится с помощью суперпозиции локальных скоростных полей по системе приоритетов или категорий. Пусть система годографов состоит из нескольких пар встречных и нагоняющих годографов и, например, такова как показано на рисунке 44.

Локальным полям скорости, рассчитанным для самых коротких пар годографов, отдается наивысший приоритет или присваивается значение категории 1. Эти локальные поля всегда присутствуют на разрезе, вследствие

того, что они наиболее детально аппроксимируют разрез. Напомним, что однородная функция изменяется по радиальной координате как степенная функция, то есть монотонно и значит, чем короче база аппроксимации по горизонтали, тем детальнее может быть восстановлен разрез. Локальные поля скорости, отвечающие более длинным расстановкам, - категория 2 – присутствуют только в тех частях разреза, где отсутствуют значения скорости, отвечающие локальным скоростным полям с меньшим значением категории. В точках пересечения локальных скоростных полей с одинаковым значением категории вычисляется среднеарифметическое значение скорости.

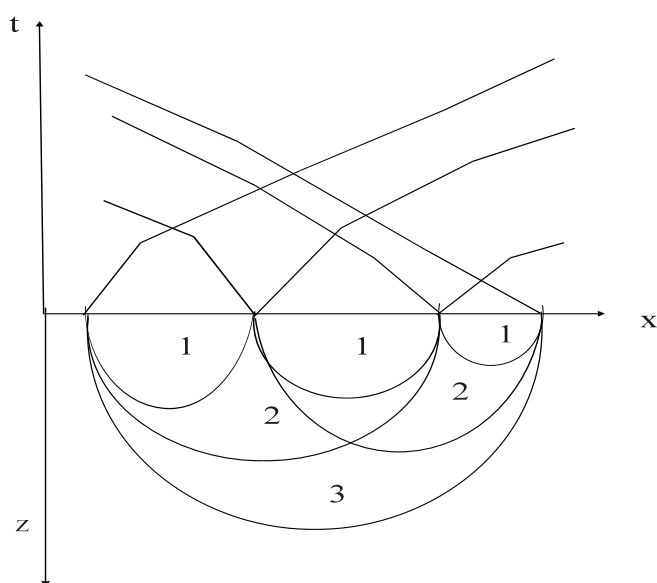


Рис.44. Формирование поля скорости из локальных скоростных полей. Цифры указывают значение категории. На разрез попадают значения скорости, отвечающие локальным скоростным полям с меньшим значением категории

Вычисленная локальная скоростная функция есть, в сущности, двухмерная скоростная однородная функция наилучшим образом аппроксимирующая реальный скоростной разрез. Иными словами, это эффективная двухмерная скоростная функция. Она подобна эффективной постоянной скорости, вычисляемой по годографу отраженной волны. В последнем случае мы аппроксимируем годограф отраженной волны гиперболой, а затем по этой гиперболе вычисляем постоянную скорость.

Построение общего скоростного разреза по локальным двумерным скоростным функциям производится аналогично построению временного

разреза в методе ОГТ в сейсмике отраженных волн. Пусть мы имеем множество годографов первых волн. Мы находим эффективную двухмерную скоростную функцию для каждой пары встречных годографов независимо друг от друга. Лучи для двух встречных годографов первых волн заполняют область, ограниченную лучом, проходящим через источники. Если предполагать, что скоростная функция непрерывно увеличивается с глубиной, то близкие лучи не пересекаются между собой. Это означает, что семейство лучей регулярно. В этом случае точки поворота лучей расположены, как показано на рис.45 . Видно, что точки поворота концентрируются в наиболее глубокой области локального скоростного поля. Лучи фокусируются в этой области и скорости здесь определены с наилучшей точностью

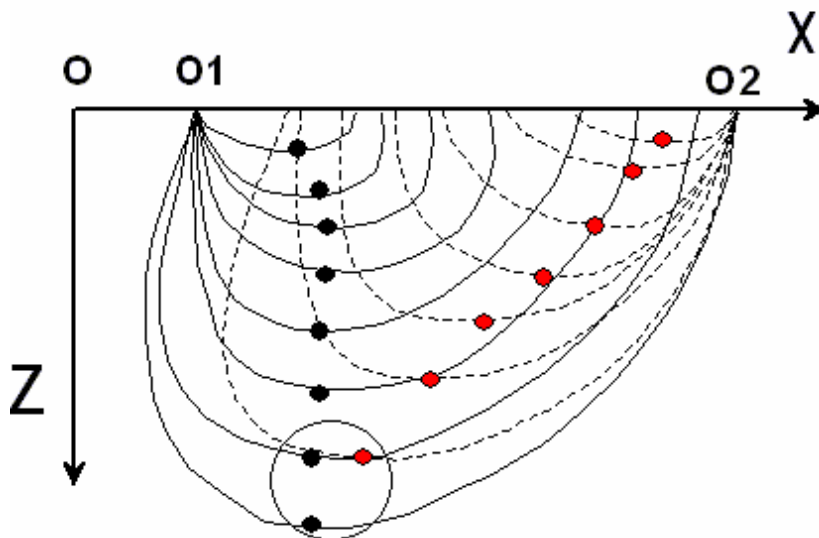


Рис. 45 Вид лучей для двух встречных годографов

Определение общего скоростного разреза для сложной системы годографов производится методом суперпозиции локальных эффективных скоростных полей, вычисленных для различных пар встречных годографов, как показано на рис. 43. В результате такой суперпозиции на разрезе остаются только самые глубокие (наиболее точные) части скоростных полей. Глубинные части скоростных полей можно назвать общей глубинной зоной по аналогии с

общей глубинной точкой в сейсмике отраженных волн. Потому что здесь фокусируются сейсмические лучи.

Аналогия с методом ОГТ не является абсолютной. Построение разреза производится на глубинной плоскости. Эффективная скоростная функция является двухмерной, поэтому снос определяется автоматически. Это показано на рис. 46, где изображен сдвиг общей глубинной зоны от центра расстановки. Высокочастотные изменения скорости в верхней части разреза сглаживаются в процессе вычисления скоростной аппроксимации, поэтому статические поправки, как правило, не вводятся. Окончательный скоростной разрез включает сейсмические границы, поэтому он может рассматриваться как макро модель разреза.

Волноводы в разрезе не могут существовать внутри локальных скоростных функций, но только на их границах. В то время как другие сейсмические границы могут располагаться и внутри локальных скоростных полей. Следовательно, для того чтобы вычислять волноводы, нужна более детальная система наблюдений.

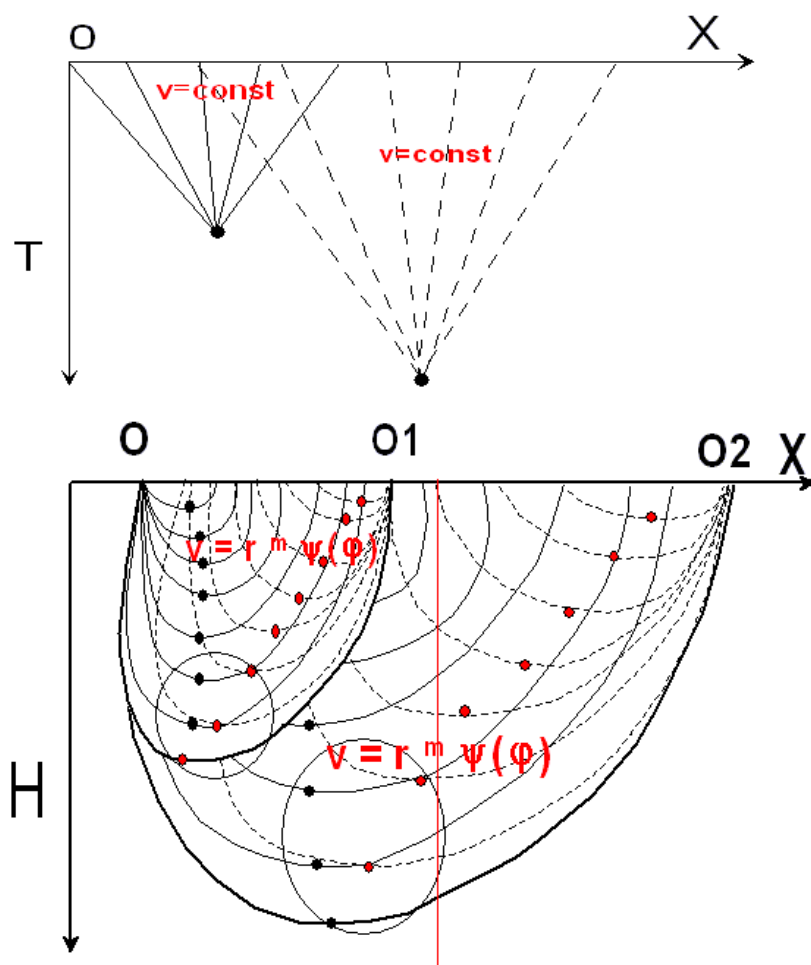


Рис. 46 Построение общего скоростного разреза методом однородных функций (внизу) аналогично построению временного разреза ОГТ (вверху)

Скорости различных локальных скоростных полей в точках, где эти поля перекрываются друг с другом, мало отличаются друг от друга, так как обратная задача на множестве однородных функций устойчива. Отклонение различных локальных скоростей в общих точках разреза характеризует погрешность вычисления скоростей в разрезе.

Окончательный скоростной разрез визуализируется как сеточная модель, когда скорости вычисляются в узлах заданной прямоугольной сетки. Выбирая размер сетки, мы только определяем форму визуализации множества локальных скоростных функции, которые уже вычислены ранее

Границы первого рода в представлении в виде поля изолиний скорости выглядят как протяженные области сгущения изолиний скорости, мощности таких областей равны размеру сетки. Границы второго рода в случае сеточного

представления поля скорости представляют собой линии, где резко изменяется градиент скорости (расстояние между изолиниями). Инверсионные границы раздела, где скорость уменьшается сверху вниз при переходе через сейсмическую границу, также определяются методом однородных функций. На разрезе они выглядят как переходные зоны мощностью равной размеру сетки..

Размер сетки для визуализации разреза не может быть выбран произвольно. Если использовать маленький шаг сетки, меньший, чем погрешность измерения скорости, то будут видны границы локальных скоростных полей. А если выбрать очень большой шаг, то будет невозможно проследить сейсмические границы. Это означает, что размер сетки определяет разрешенность разреза. Различные трансформации окончательного скоростного поля (градиент скорости, составляющие градиента и т.д.) можно использовать, чтобы выделить особенности разреза.

Реальность разреза полученного методом однородных функций подтверждается вычислением теоретических времен, которые всегда хорошо согласуются с наблюдаемыми. Вычисленные лучи обычно проникают на полную глубину разреза.

3.14 Устойчивость решения обратной кинематической задачи сеймики на множестве двухмерных однородных скоростных функций

3.14.1 Квазирешения.

Мы рассматриваем задачу в связи с двухмерной обратной кинематической задачей сеймики. Пусть X есть линейное метрическое пространство двухмерных скоростных функций и Y есть линейное метрическое пространство двухмерных скоростных полей, A есть непрерывный оператор прямой задачи, действующий из X в Y . Большинство некорректных задач может быть сведено к решению уравнения

$$Ax=y,$$

где y есть заданный элемент пространства Y , а x есть искомый элемент пространства X .

Обычно мы знаем только y_δ , которое аппроксимирует значение y .

Пусть V есть замкнутый компакт в X и T есть замкнутый компакт в Y .

Квазирешением уравнения

$$Ax=y_0,$$

на V является такой элемент $x_0 \in V$, для которого функционал $f(x)=\rho(Ax, y_0)$ имеет на V минимальное значение. Если y_0 задан приближенно с погрешностью δ , и для квазирешения x_0 отклонение

$$\rho(Ax_0, y_0) < \delta,$$

тогда x_0 может рассматриваться как as an approximate solution.

Пусть $t_0 \in T$ аппроксимирует y_δ , и

$$\rho(t_0, y_\delta) < \delta.$$

Пусть t_0 есть единственный элемент, для которого уравнение

$$\rho(t_0, y_\delta) = \min.$$

В этом случае,

Любая функция $x_0 \in V$, которая является решением уравнения

$$A^{-1} t_0 = x_0$$

Будет располагаться в ε -окрестности искомого x (Иванов, 1963). Таким образом, x_0 будет приближением к x .

3.14.2 Множество двумерных возрастающих непрерывных однородных функций, есть замкнутый компакт

Легко видеть, что множество V двумерных непрерывных однородных функций, которые увеличиваются с увеличением полярного угла

$$v = r^m \psi(\varphi), \quad (A1)$$

есть замкнутый компакт при условии

$$0 \leq \varphi \leq A < \pi/2, 0 < B \leq r \leq C,$$

где A, B and C есть действительные числа.

Множество годографов T отвечающих двумерным однородным функциям также являются замкнутым компактным множеством так как A есть непрерывный оператор. В работе Piip, 2001 показано, что временные поля, отвечающие скорости (A1) удовлетворяют уравнению

$$t = r^{1-m} F(\varphi, \varphi_0, r/r_0), \quad (A2)$$

где r , φ and r_0 , φ_0 являются координатами приемника и источника. Если $\varphi = \varphi_0 = 0$ тогда уравнение (A2) описывает географы на поверхности среды $\varphi=0$

$$t = r^{1-m} T(r/r_0). \quad (\text{A3})$$

Из уравнения (A3) следует, что t есть однородная функция степени $(1-m)$ относительно r и r_0 и, следовательно, согласно теореме Эйлера

$$r \frac{\partial t}{\partial r} + r_0 \frac{\partial t}{\partial r_0} = (1-m)t. \quad (\text{A4})$$

Произведем замену переменных в (A4)

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{r_0}{r}\right),$$

получим

$$t = R^{1-m} \Omega(\theta), \quad (\text{A5})$$

здесь m есть действительное число, а $\Omega(\theta)$ есть произвольная функция.

Произведем следующую трансформацию функции (A5):

$$l = \ln t = (1-m) \ln \sqrt{r^2 + r_0^2} + \ln(\Omega(\arctan(\frac{r_0}{r}))), \quad (\text{A6})$$

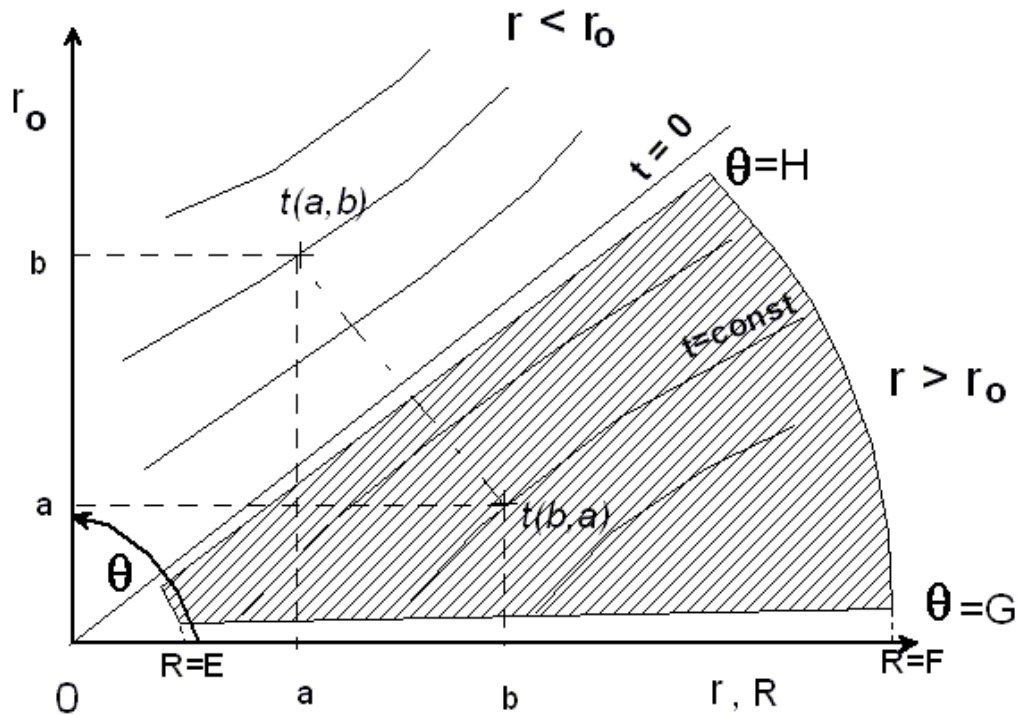


Рис А1. Здесь изображены оси двух координатных систем: полярной (R, θ) и декартовой (r, r_0) . Заштрихованный сектор есть область определения функции (A5), $t = \text{const}$ изолинии функций (A3) и (A5).

Пусть $l \in L$,

Если $r=r_0$, тогда $t=0$, следовательно, мы должны ограничить область определения функции (A5)

$$0 < E \leq R \leq F \text{ and } 0 < G \leq \theta \leq H < \pi/4, \quad (\text{A7})$$

где E, F, G, H некоторые действительные числа (рис. 45).

Логарифмический оператор является непрерывным и однозначным при условии (A7), это означает, что мы получили взаимно-однозначное отображение множества T на множество L .

Для функции (A3) $t(a,b)=t(b,a)$ (Рис. 45), согласно принципу взаимности, значит, область $r > r_0$ есть зеркальное отображение области $r < r_0$ относительно оси $r=r_0$.

Тогда достаточно использовать для инверсии только годографы в области $r > r_0$.

Условие (A7) не ограничивает общность задачи, потому что при $r=r_0$, в случае любой функции $v \in V$, мы имеем $t=0$.

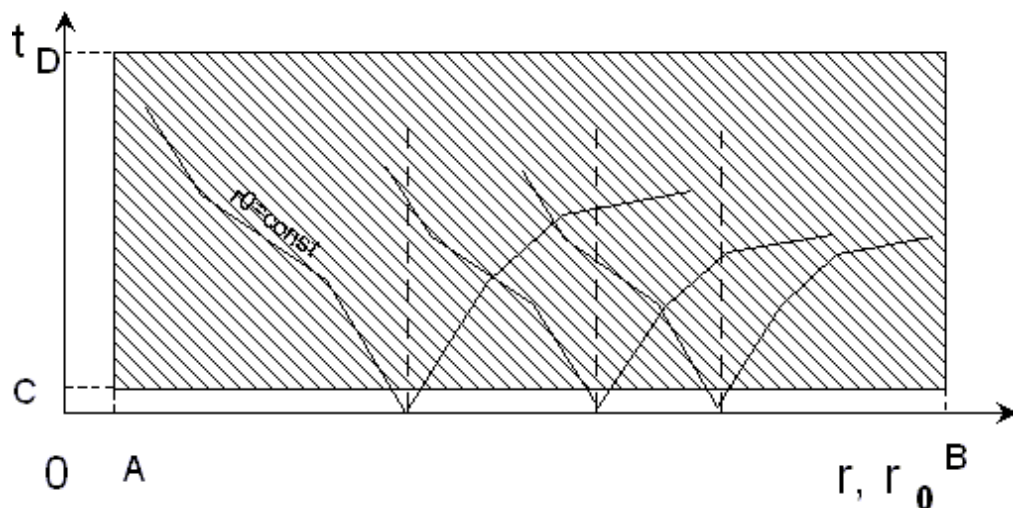


Рис. А2. Заштрихованный прямоугольник есть область определения функции (А3), $r_0 = \text{const}$ - годографы в общепринятом изображении.

Область определения функции (А3) на плоскости изображения годографов в общепринятом виде показана на рис. 46

Легко видеть, что L есть выпуклое множество. Известно (Ivanov, 1963), что в этом случае только единственная функция $l_0 \in L$ наилучшим образом аппроксимирует $\ln y_\delta$ и удовлетворяет уравнению

$$\rho(l, \ln y_\delta) = \min.$$

Обратными преобразованиями к А6 мы получим единственное значение

$$t_0 = \exp(l_0).$$

Если $\rho(t_0, y_\delta) < \delta$, любое решение $x_0 \in V$ уравнения

$$Ax = t_0$$

будет лежать в ε -окрестности x :

$$\rho(x_0, x) < \varepsilon,$$

согласно Иванову, (1963).

Таким образом, решение обратной кинематической задачи сейсмоки на множестве двухмерных однородных функций, которые увеличиваются с увеличением полярного угла, устойчиво.

Литература

1. Аки К., Ричардс П., Количественная сейсмология. Теория и методы. Т.2. М. Мир. 1983, 360с.
2. Иванов В.К., 1963. О некорректно поставленных задачах. *Математический сборник*. т **61**, N2, 211-223.
3. Кондратьев О.К., Гамбурцев А.Г. Сейсмические исследования в прибрежной Антарктиде. Изд-во АН СССР, М 1962
4. Облогина Т.И. Сейсморазведка неоднородных сред. М. 1968 (учебное пособие).
5. Пийп В.Б. Способ определения разреза в изолиниях скорости по годографам рефрагированных волн. Изв. АН СССР, Физика Земли. N 8, 1978, с 65-72.
6. Пийп В.Б. Использование однородных функций для аппроксимации сейсмического скоростного разреза. Изв. АН СССР, Физика Земли. N 7, 1981, с 83-91.
7. Пийп В.Б. Новые методы интерпретации сейсмических временных полей в средах с переменными скоростями. Вестник Моск. Ун-та. сер.4 Геология, N3, 1984, с 83-92.
8. Пийп В.Б. Локальная реконструкция сейсмического разреза по данным преломленных волн на основе однородных функций. Физика Земли. № 10, 1991, с 24-32.
9. Пийп В.Б. Кинематика сейсмических волн в средах с однородной функцией скорости. М 1999 (учебное пособие).
10. Červený V. Ray methods in seismic. Mathematical-Physical faculty in Karlovy University in Praha. 1978. 192p.